Parte I

Teoría

Capítulo 2

Propagación de perturbaciones

2.1. Introducción

En este capítulo introductorio se presenta el fenómeno físico de la propagación de perturbaciones, dando una visión general y centrándose en las ideas y conceptos que son de interés para este proyecto. Partiendo de una perturbación genérica, se van a ir añadiendo restricciones hasta llegar al modelo de onda que nos interesa, presentando las ecuaciones y parámetros que se van a utilizar y haciendo un repaso de los conceptos implicados.

Supóngase que sobre un medio cualquiera se produce una perturbación en un punto denominado **foco de la perturbación (F)**. Ésta se propaga en todas las direcciones y poco a poco se va amortiguando hasta que desaparece. El típico ejemplo es el de la piedra que cae sobre un estanque de agua en reposo. Se generan pequeñas ondas que se propagan radialmente, con centro en el lugar donde la piedra cayó.

El fenómeno de la propagación de una perturbación se denomina **movimiento ondulatorio** y la perturbación en sí recibe el nombre de **onda**.

Más información sobre el movimiento ondulatorio se pueden encontrar en cualquier libro de física general, por ejemplo [27].

2.2. Clasificación de las perturbaciones

Las perturbaciones se propagan en todas las direcciones en las que haya medio por el que poder hacerlo. Así, existe **propagación tridimensional**, como por ejemplo el sonido o la luz, **bidimensional** como en el ejemplo del estanque y **unidimensal**, las cuerdas vibrantes de una gitarra (Figura 2.1)

La propagación no se realiza hasta el infinito, sino que se va atenuando hasta que desaparece. La atenuación se debe a dos fenómenos diferentes:

1. **Absorción de energía por parte del medio**. Ej. rozamiento entre las partículas.

2. **La energía aportada por el foco cada vez se reparte entre un número mayor de partículas**, según se va propagando.

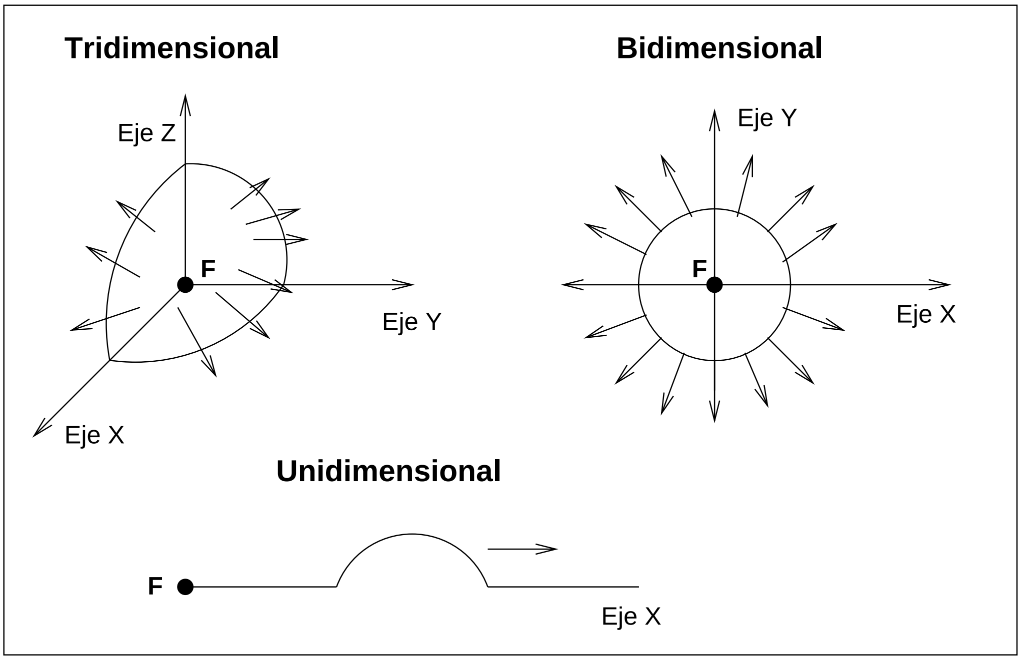

Figura 2.1: Tipos de propagación de perturbaciones

Esto permite realizar otra clasificación: **Propagación con amortiguamiento y sin él**. En la figura 2.2 se muestra este concepto aplicado a una perturbación con propagación unidimensional. Sin embargo, el modelo sin amortiguamiento, además de ser más sencillo su estudio, es necesario si la propagación se realiza en **medios activos**, es decir, medios que no absorben energía de la perturbación sino que la aportan. Los **medios pasivos** son los clásicos: el aire en la propagación del sonido, el vacío en la propagación de la luz, las cuerdas de una guitarra,etc. El lector puede estar intrigado llegados a este punto, ¿qué medio es activo?. Por ejemplo un gusano, vivo o mecánico. En ellos las ondas de movimiento, bien transversales o bien longitudinales, se transmiten por el medio, que es el propio gusano, pero la energía para la propagación es aportada por el gusano y no por un foco externo, por lo que las ondas no sufren atenuación.

Las propagación de perturbaciones unidimensionales puede ser de dos tipos: **transversal** o l**ongitudinal**. La propagación transversal es aquella en la que los puntos se desplazan perpendicularmente a la dirección de propagación, mientras que en la longitudinal lo hacen en la misma dirección. Las ondas reciben los nombres de **transversales** o **longitudinales**, según cómo sea la propagación. En la figura 2.3 se han dibujado dos ejemplos. El primer sistema está formado por unas bolas unidas a través de muelles y colgadas del techo por una cuerda. La dirección de propagación de las ondas es el eje x, en el mismo sentido en el que se mueven las propias bolas. Es el mismo tipo de ondas que recorren los cuerpos de las lombrices de tierra. El segundo sistema es una cuerda en la que se ha aplicado una fuerza sobre uno de los extremos. Esto provoca una onda que se dezplaza de izquierda a derecha, pero los puntos de la cuerda se mueven perpendicularmente a la dirección de propagación. Si miramos un corte transversal del mar, las olas son ondas de este tipo.

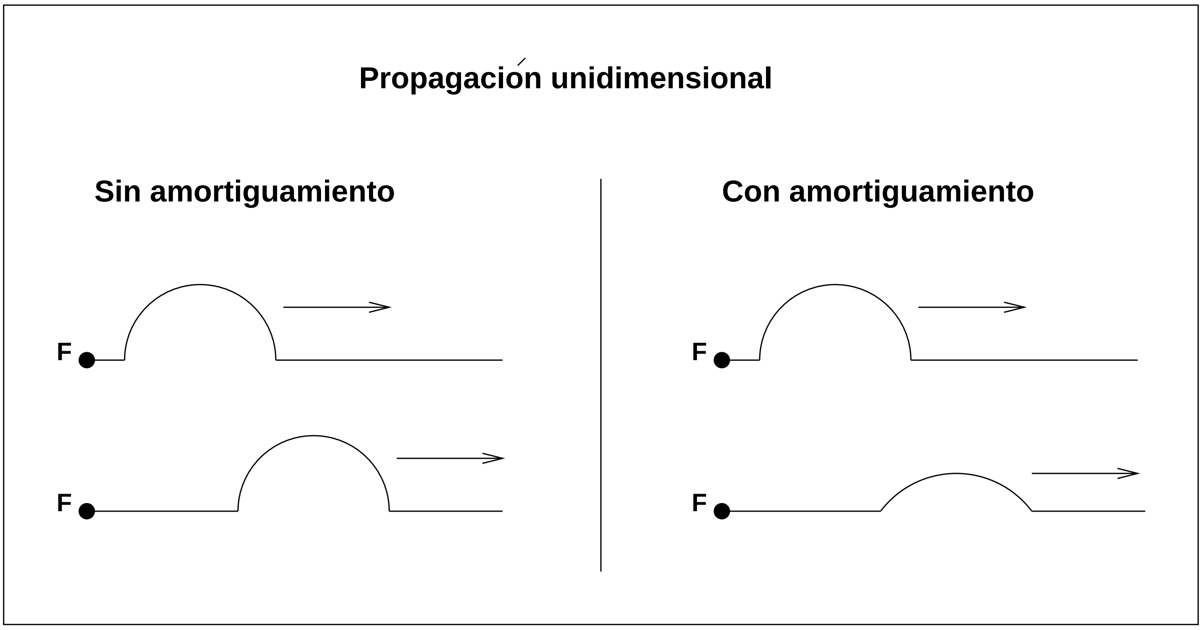

Figura 2.2: El efecto del amortiguamiento en una perturbación unidimensional

Finalmente, se habla de movimiento ondulatorio **periódico** y **no periódico**. En el primero, la perturbación en el foco se produce periódicamente, cada cierto intervalo de tiempo y en el segundo esta perturbación cesa. (Figura 2.4).

Para centrar ideas, se resume a continuación la clasificación que se ha establecido, según los diferentes criterios empleados:

1. **Según las direcciones del espacio en que se propaga:**
   - Propagación tridimensional
   - Propagación bidimensional
   - Propagación unidimensional
2. **Según la atenuación que sufren por el medio**
   - Con amortiguamiento
   - Sin amortiguamiento
3. **Según el movimiento de los puntos respecto a la dirección de propagación de la onda**
   - Ondas transversales
   - Ondas longitudinales

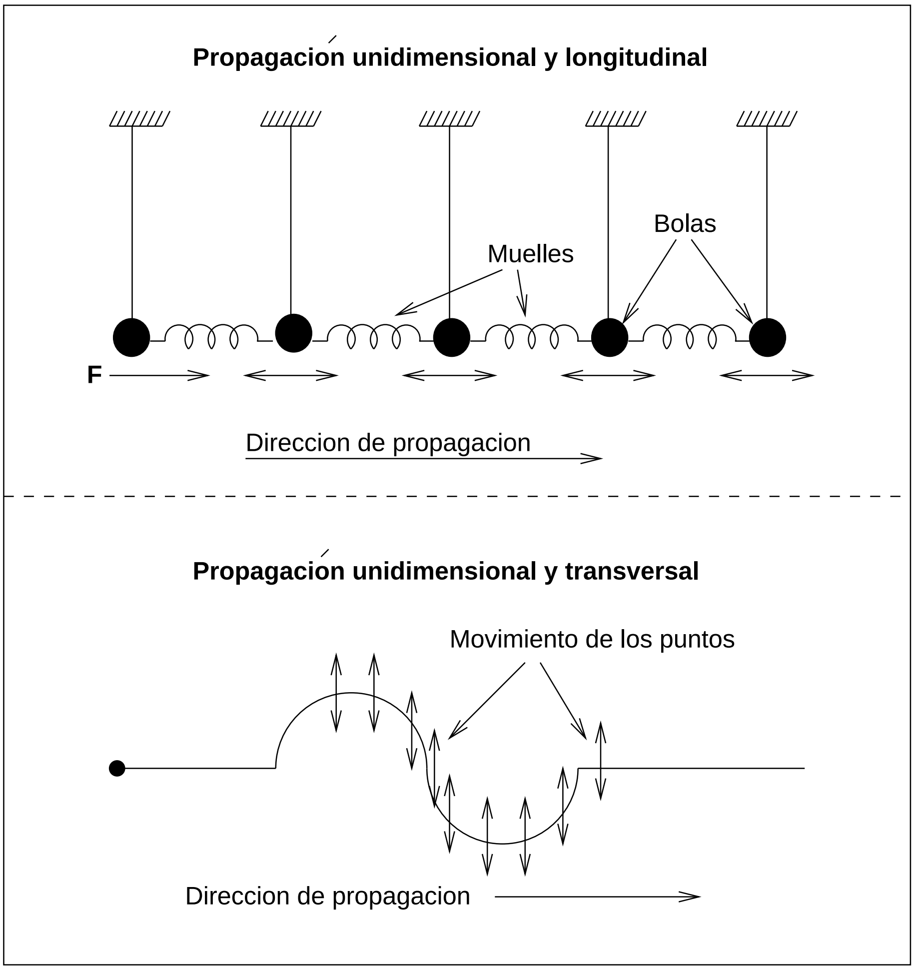

Figura 2.3: Propagación longitudinal y transversal

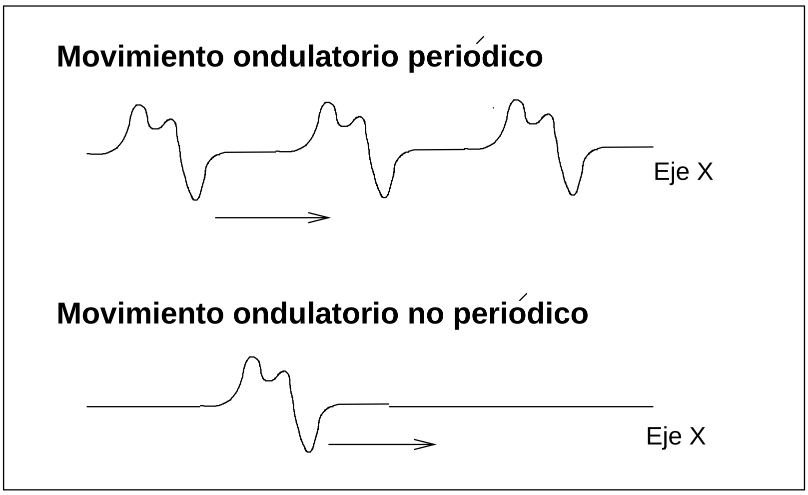

Figura 2.4: Movimiento ondulatorio periódico y no periódico

4. **Según la repetición de la perturbación inicial en el foco:**
   - Movimiento ondulatorio periódico
   - Movimiento ondulatorio no periódico

Las ondas que nos interesan son las unidimensionales, transversales, sin amortiguamiento y periódicas. En los siguientes apartados partiremos de las ondas transversales unidimensionales e iremos aplicando restricciones para obtener las ecuaciones y propiedades que interesan.

2.3. Ondas transversales unidimensionales (O.T.U)

2.3.1. Propagación

Analicemos con un poco más de detalle cómo se propaga una **onda transversal unidimensional** que, a partir de ahora, se denotará por las siglas **O.T.U**. Supongamos que tenemos un medio situado sobre el eje x por donde se va a propagar una perturbación. El punto F es el foco de la perturbación y los puntos A y B son de prueba, para ver cómo son afectados (Ver figura 2.5). Inicialmente el sistema está en reposo. En cierto instante t=1 ha aparecido la perturbación que se va propagando a una cierta velocidad. Cuando alcanza los puntos de prueba A y B, estos se mueven transversalmente, adaptándose a la forma de la onda, pero su coordenada x permanece inalterada. El lector puede imaginarse que el dibujo representa un corte transversal del mar, donde la perturbación es una ola y los puntos A y B son dos boyas que flotan en el agua. Intuitivamente se ve cómo las boyas se mueven hacia arriba y hacia abajo, pero no avanzan. Al terminar de pasar la ola, instante t=5, las boyas se encuentran en la misma posición que estaban inicialmente[1]. Por esto se dice que **las perturbaciones son fenómenos asociados al transporte de energía pero no de materia.**

Para describir matemáticamente a una perturbación necesitamos la función que la describe inicialmente. En el caso del ejemplo de la figura 2.5 esta función se corresponde con la asociada al instante $t = 1$. A partir de ahora esta función se denotará como **F(x)** (haciendo referencia al Foco). Obsérvese que no depende del tiempo, es estática. Nos está indicando la forma que tiene la onda inicialmente, antes de propagarse.

En el caso más general, considerando que hay amortiguamiento, para describir el comportamiento de la perturbación, necesitamos hacer "fotografías" en cada instante de tiempo, de manera que obtengamos una película de cómo ha evolucionado la propagación. Cada fotografía es una función **P(x,t)** (haciendo referencia a Perturbación), para un t fijo (ver figura 2.6). En el instante inicial $t = 0$ tenemos la función $P(x, 0)$, que se corresponde con $F(x)$, en el instante siguiente se tendrá otra función $P(x, 1)$ que será muy parecida a $P(x, 0)$ pero estará desplazada hacia la derecha y además atenuada:[2]

$$P(x, 1) = G(1)P(x - s, 0)$$

[1] Se está suponiendo que no existe ningún tipo de corriente marina que pueda desplazar las boyas.

[2] La atenuación depende del medio, y cada frecuencia que compone el espectro de la perturbación sufrirá una atenuación diferente. En el ejemplo de la fi gura 2.6 se ha supuesto por simplicidad que la atenuación de la onda es igual para todas las frecuencias (y por tanto no hay distorsión).

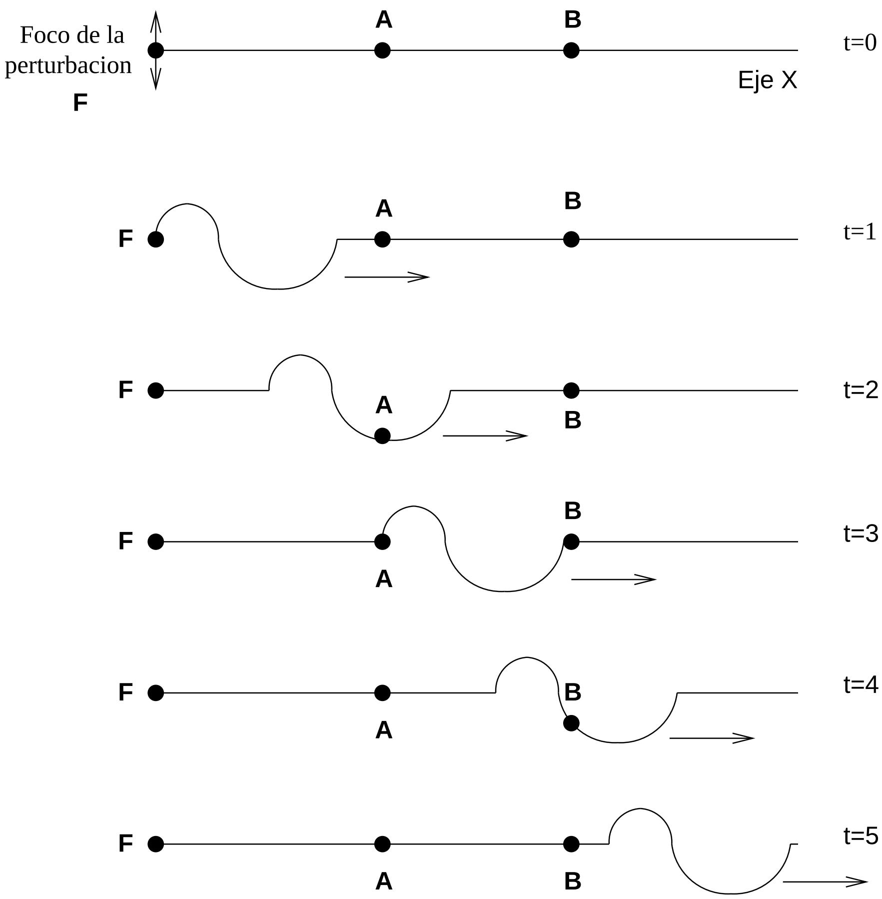

Figura 2.5: Propagación de una perturbación transversal y unidimensional

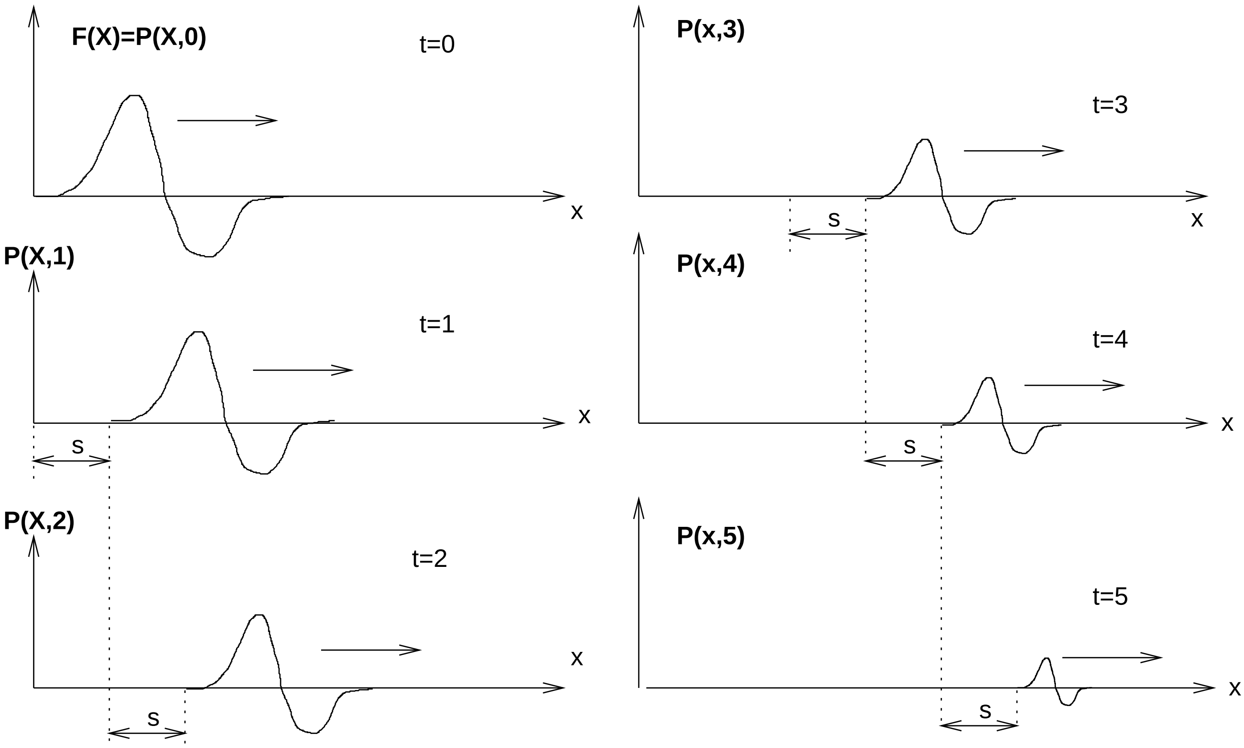

Figura 2.6: Propagación de una onda transversal y unidimensional, con amortiguamiento

siendo:

- **G(1):** Ganancia de la onda en el instante $t = 1$. $G(t) = 1 - A(t)$, siendo $A(t) \in (0, 1)$ la atenuación en el instante t.
- **s**: Distancia que avanza la onda en cada unidad de tiempo. $s = vt$, siendo **v** la **velocidad de propagación de la onda en el medio.**[3]

Para un instante de tiempo genérico t, la onda habrá avanzado un espacio de vt unidades sobre el eje x, y habrá sufrido una atenuación de $1 - A(t)$, por lo que la expresión de la onda queda de la forma:

$$P(x, y) = (1 - A(t))\, F(x - vt) \qquad (2.1)$$

siendo:

- **P(x,t)**: la ecuación de la onda para cualquier instante de tiempo t y para cualquier punto x. (Perturbación)
- **A(t)**: Atenución de la onda para el instante t

[3]Se está suponiendo, para mayor simplicidad, que el medio es homogéneo por lo que la velocidad de propagación siempre será constante.

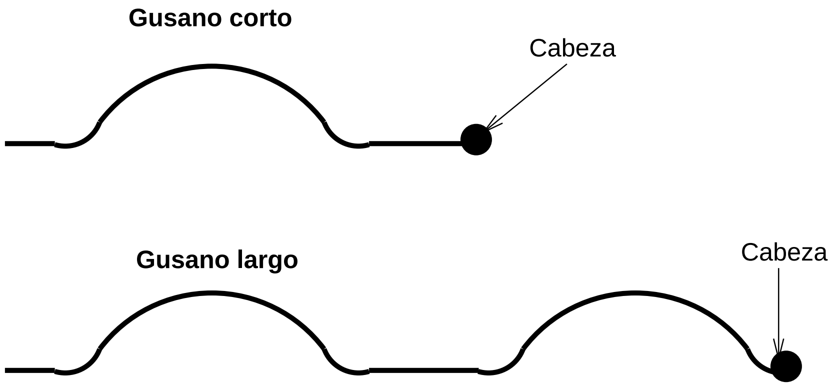

Figura 2.7: Un gusano corto y uno largo que son recorridos por ondas transversales de la misma amplitud

- **F(x)**: Perturbación inicial, en el instante t=0. Es la que define la forma de la onda. (Foco)
- **v**: Velocidad de propagación de la onda

2.3.2. Propagación de una O.T.U sin amortiguamiento

La ecuación 2.1 se puede simplificar todavía más si tenemos en cuenta el que no haya ningún tipo de amortiguamiento. En estos casos estamos considerando que:

1. **El medio no absorbe energía de la onda**
2. **La onda se propaga hasta el infinito, siempre con la misma amplitud**

Esto es sólo posible en medios que sean activos, que vayan aportando energía a la onda de manera que se compense la atenuación para que se cumpla siempre que A(t)=0. Como ya se apuntó en el apartado 2.2, un gusano vivo o mecánico es un ejemplo de un medio activo. En ellos las ondas se propagan siempre con la misma amplitud independientemente de la longitud del gusano. Supongamos dos gusanos, uno más largo que otro, pero los dos se mueven con ondas transversales de la misma amplitud. El gusano largo tendrá que aportar más energía que el corto, porque tiene más ondas que recorren su cuerpo (ver figura 2.7).

La **ecuación de una O.T.U que se propaga en medios activos**, es :

$$P(x,t) = F(x - vt) \tag{2.2}$$

2.4. O.T.U periódicas y sin amortiguamiento

En el caso de una O.T.U sin amortiguamiento y no periódica, para tenerla caracterizada es necesario conocer la función P(x,t) $\forall x \in (x, \infty)$ y $\forall t \in (0, \infty)$. Sin embargo cuando se trata de una O.T.U sin amortiguamiento y periódica básta con conocer P(x,t) $\forall x \in (0, \lambda)$ y $\forall t \in (0, T)$ siendo λ **la longitud de onda** y **T el periodo**, que se definen con más detalle en el apartado 2.4.1. Estas ondas están perfectamente caracterizadas por F(x), v, λ y T.

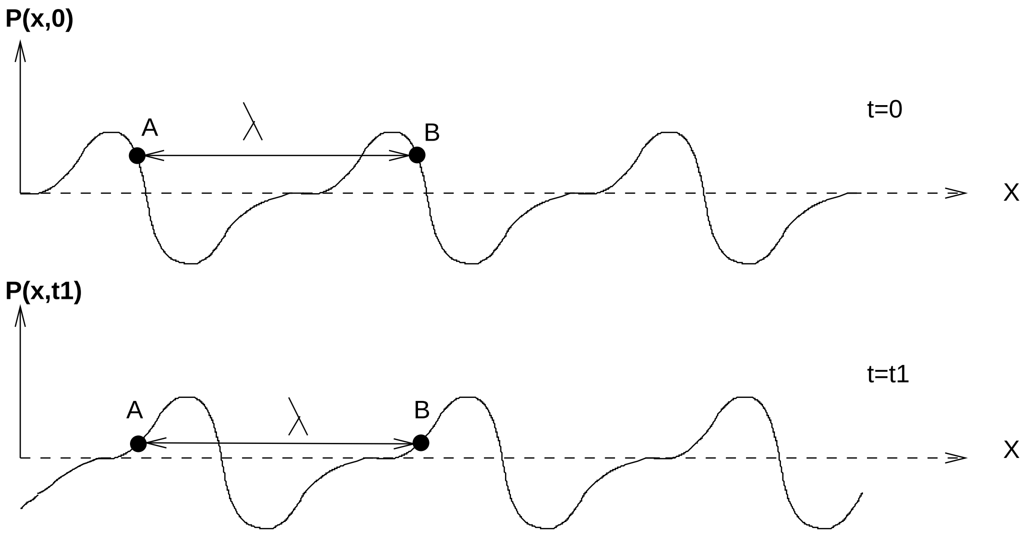

Figura 2.8: Concepto de longitud de onda.

2.4.1. Parámetros importantes

2.4.1.1. Longitud de onda (λ)

Se denomina ***longitud de onda*** a la distancia entre dos puntos consecutivos que en todo momento tienen el mismo estado de perturbación, es decir, que $\forall t, P(x_A, t) = P(x_B, t)$, siendo x_A y x_B dos puntos separados una distancia λ. En la figura 2.8 se ha representado el concepto de longitud de onda. Los puntos A y B están siempre en el mismo estado de perturbación ($y_A = y_B$). La longitud de onda también recibe el nombre de **periodo espacial**, recalcándose con este término que se trata de la mínima distancia a partir de la cual la onda se repite. Fijado un tiempo $t_0, \forall x \in [0, \lambda), P(x, t_0) = P(x + \lambda, t_0)$. Es decir, que sólo es necesario conocer la función P(x,t) en el intervalo $x \in [0, \lambda)$; y a partir de él se conoce el valor de P(x,t) $\forall x$. En la figura 2.9 se ha dibujado P(x,t) en cuatro instantes de tiempo diferentes t_0, t_1, t_2 y t_3, y con la x en el intervalo $[0, \lambda]$. Para obtener el dibujo de la onda completa no hay más que reproducir estos intervalos hacia la derecha y hacia la izquierda.

2.4.1.2. Periodo (T)

Se define el p***eriodo de una onda*** como el tiempo mínimo que transcurre desde que un punto x vuelve a estar en el mismo estado de perturbación, es decir, $\forall x, \forall t, P(x, t) = P(x, t + T)$. De esta manera sólo es necesario conocer el comportamiento de la onda en el intervalo $t \in [0, T)$. En la figura 2.10 se muestra el concepto gráficamente. Se parte de la onda en el instante t=0 y se toma como referencia el punto x=0. En la gráfica inferior se ha dibujado la evolución temporal de la amplitud del punto x=0. El tiempo que transcurre hasta que se vuelve a encontrar en el mismo estado de perturbación que inicialmente es T.

Se define la **frecuencia** como la inversa del periodo: $f = \frac{1}{T}$

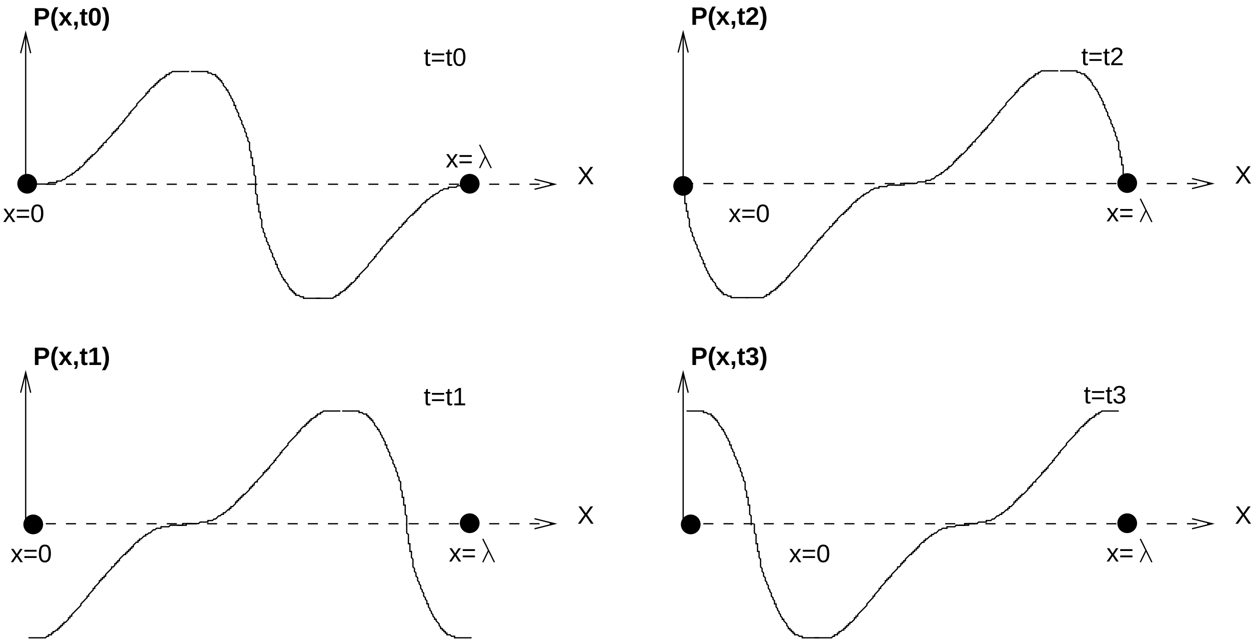

Figura 2.9: La onda P(x,t) dibujada para cuatro instantes de tiempo diferentes y sólo en el intervalo $[0, \lambda]$

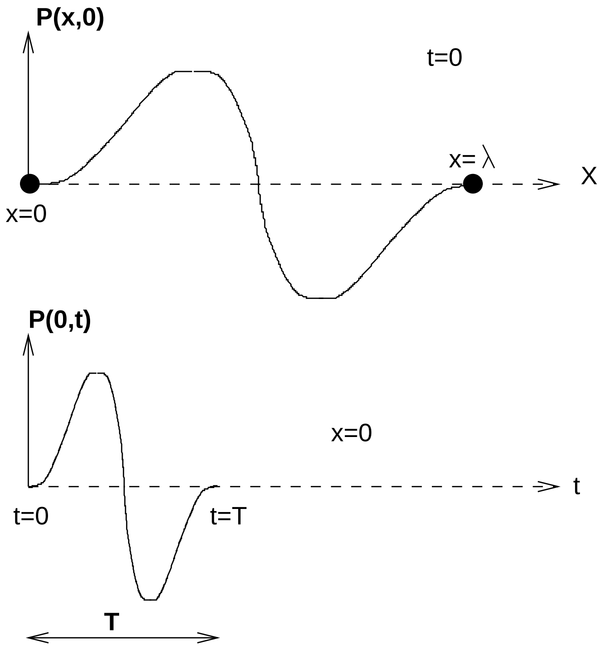

Figura 2.10: Concepto de periodo

2.4.1.3. Velocidad de propagación (v)

Se define como el espacio que recorre la onda en una unidad de tiempo. De las definiciones anteriores se puede observar que **existe una relación entre la velocidad de propagación, el periodo y la longitud de onda.** Suponiendo una velocidad constante, por estar propagándose la onda por un medio homogeneo, un espacio λ se recorre en un tiempo T, obteniéndose así la siguiente relación:

$$v = \frac{\lambda}{T} \Leftrightarrow \lambda = vT \tag{2.3}$$

2.4.2. Formulación

Para caracterizar a una onda transversal unidimensal periódica y sin amortiguamiento sólo hay que hacerlo en un intervalo de tiempo igual al periodo y en un intervalo espacial igual a la longitud de onda:

$$P(x,t) = F(x - vt), \forall x \in [0, \lambda), \forall t \in [0, T) \tag{2.4}$$

También se verifican las siguientes igualdades:

- **Periodicidad temporal**: $P(x,t) = P(x, t+T)$
- **Periodicidad espacial**: $P(x,t) = P(x+\lambda, t)$
- **Velocidad de propagación**: $v = \frac{\lambda}{T}$

2.5. Ondas sinusoidales

2.5.1. Fórmulas

Las ondas con las que se ha trabajado hasta ahora estaban definidas a partir de la función F(x), que define la forma de la onda en el instante inicial (t=0). Si esta función es de la forma:

$$F(x) = A\sin(kx + \varphi) = P(x, 0) \tag{2.5}$$

diremos que se trata de una **onda sinusoidal**. Al hablar de este tipo de ondas entenderemos que se trata de ondas transversales unidimensionales periódicas y sin amortiguamiento. Los nuevos parámetros que aparecen son:

- **A**: Amplitud de la onda
- **k**: Número de onda. Es el número de longitudes de onda en la distancia 2π. $k = \frac{2\pi}{\lambda}$
- φ**:** Fase inicial. Determina el valor inicial de F(x), cuando x=0.

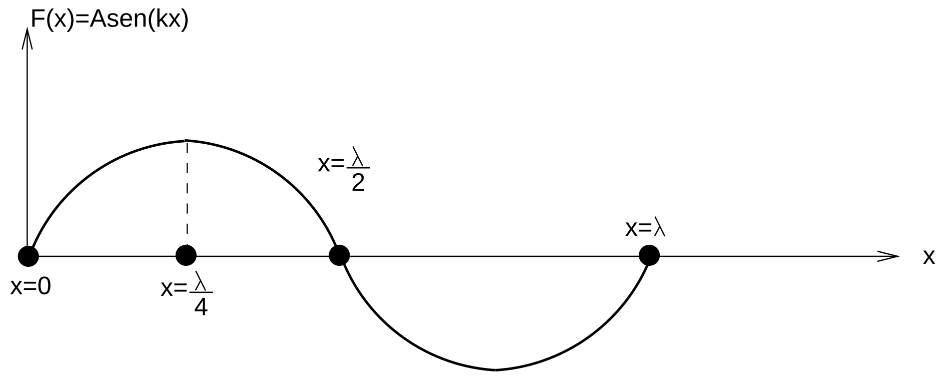

Figura 2.11: Una onda sinusoidal, en el intervalo $x \in [0, \lambda]$

En la figura 2.11 se ha dibujado una onda sinusoidal en el intervalo $x \in [0, \lambda]$ y para t=0, con $\varphi = 0$.

Teniendo en cuenta las ecuaciones 2.4 y 2.5 se obtiene **la ecuación general de una onda sinusoidal**:

$$P(x,t) = A\sin[k(x - vt) + \varphi] \tag{2.6}$$

y teniendo en cuenta la definición de la constante k, se llega a:

$$P(x,t) = A\sin[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) + \varphi] \tag{2.7}$$

Por supuesto se siguen cumpliendo las ecuaciones definidas en el apartado 2.4.2 (velocidad de propagación, periodicidad espacial y temporal).

2.5.2. Superposición de ondas sinusoidales

La importancia que tienen las ondas sinusoidales se debe al hecho de que cualquier perturbación periódica se puede descomponer en una superposición de ondas sinusoidales de frecuencias y fases adecuadas. De esta manera sólo nos centraremos en el estudio de este tipo de ondas, pudiendo aplicar los resultados obtenidos a ondas con formas más complejas, aplicando el principio de superposción.

El trabajar sólo con ondas sinusoidales facilita los cálculos (¡¡y también los dibujos!!)

2.5.3. Ondas sinusoidales longitudinales

Las *ondas sinusoidales transversales* son las que se han estado viendo hasta ahora y son las que más nos interesan. Sin embargo también es interesante conocer las *ondas sinusoidales longitudinales*, ya que más adelante se utilizarán para comprender el movimiento de un gusano longitudinal.

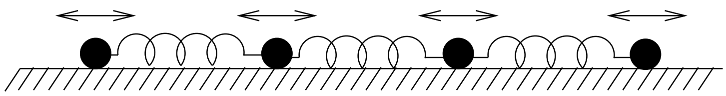

Figura 2.12: Un sistema por el que se propagan ondas longitudinales

La ecuación de una onda sinusoidal longitudinal es exactamente igual a la transversal (ec. 2.6), salvo por el hecho de que P(x,t_0), siendo t_0 un instante concreto, representa el desplazamiento en el eje de abcisas del punto x considerado en vez de una amplitud sobre el eje y. Esto hace que estas ondas no se “vean” tan bien como las transversales. Si se toma una fotografía en un instante t_0 de una onda transversal propagándose por una cuerda, se verá perfectamente la forma de la onda. Sin embargo si se hace lo mismo con una longitudinal, no se aprecirá cómo es la forma de la onda. **Pero las ecuaciones y las propiedades son exactamente iguales para ambos tipos**.

Los puntos situados sobre el eje x oscilan con respecto a su posición de equilibrio, pero NO avanzan. Cuando la onda pase, los puntos volverán a su posición inicial. En la figura 2.12 se muestra un sistema constituido por 4 bolas unidas por tres muelles. Suponiendo despreciable el rozamiento de las bolas con la superficie sobre la que apoyan, cuando se aplica una fuerza sobre la bola del extremo derecho, se producen ondas longitudinales que recorren el sistema de derecha a izquierda. En régimen permanente las bolas se moverán hacia la izquierda y hacia la derecha pero el desplazamiento medio será nulo.

2.6. Resumen

En este capítulo se ha partido de la idea genérica de perturbación y se han ido realizando particularizaciones hasta obtener las ecuaciones de las ondas que son de interés para este proyecto. De todas las perturbaciones, nos interesan las que se propagan en una dimensión (unidimensionales). Con ellas se han introducido los conceptos de función foco F(x) y la función perturbación P(x,t) en la que aparecen dos parámetros nuevos, la atenuación y la velocidad de propagación (v).

Si nos restringimos a medios activos, la atenuación no existe y la relación entre P(x,t) y F(x) es directa (ec. 2.2). Si además las ondas son periódicas, aparecen dos nuevos parámetros: longitud de onda (λ) y periodo (T), que nos permite trabajar con la perturbación en los intervalos $x \in [0, \lambda)$ y $t \in [0, T)$.

Cualquier perturbación se puede obtener como suma de ondas sinusoidales, de ahí su importancia. La ecuación que describe las ondas sinusoidales transversales sin amortiguamiento es la 2.7 y los parámetros de interés son:

- **Longitud de onda (λ)**
- **Periodo (T)**
- **Velocidad de propagación (v)**

- **Amplitud (A)**
- **Fase inicial (φ)**

Todos estos parámetros no son independientes sino que existen relaciones que los ligan. Así, λ, **T** y **v** están relacionados por la ecuación: 2.3.

En las **ondas transversales** las partículas se desplazan perpendicularmente a la dirección de propagación, manteniendo fija su coordenada x mientras que en las **ondas longitudinales** lo hacen en la misma dirección de propagación, pero el valor medio del desplazamiento de cada partícula es siempre nulo. **Las ondas están asociadas al transporte de energía pero NO de materia.**

Capítulo 3

Mecanismos de movimiento I: Gusano longitudinal

3.1. Introducción

En el capítulo 2 se han introducido los conceptos fundamentales sobre la propagación de perturbaciónes. Hay una propiedad fundamental que siempre se cumple:

Las ondas son fenómenos asociados al transporte de energía, pero NO de materia

En este capítulo estudiaremos los **gusanos longitudinales**, definidos como aquellos que son recorridos por ondas longitudinales, desde la cola hasta la cabeza. Un ejemplo podrían ser las lombrices de tierra. El modelo desarrollado nos permitirá responder a las siguientes cuestiones fundamentales:

1. ¿***Es posible aplicar el fenómeno de la propagación de ondas para conseguir transporte de materia y que por tanto se pueda aplicar a mover un gusano longitudinal robot?***
2. ***¿Qué mecanismos son necesarios para conseguirlo?***

Primero parametrizaremos el gusano y definiremos su estado interno. Después caracterizaremos el movimiento de avance, definiendo reglas que se deben cumplir para conseguirlo. Además haremos un estudio sobre la velocidad de avance y los parámetros que influyen en ella. Finalmente comentaremos los problemas de implementación que este tipo de gusanos presenta.

3.2. Modelo de gusano longitudinal

3.2.1. Parámetros de modelado

Supondremos que el gusano está constituido por N segmentos iguales, de longitud L_0 cuando están en reposo. Los segmentos se numeran empezando por la cola (segmento 0) y terminado por

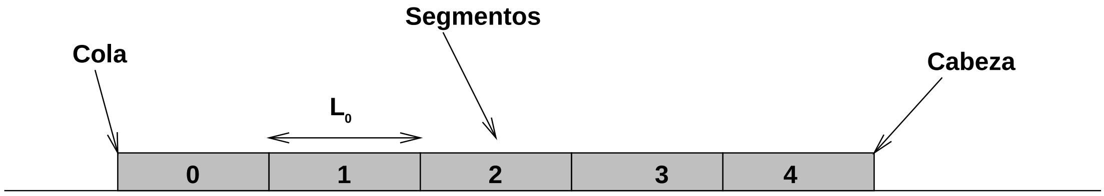

Figura 3.1: Gusano longitudinal de cinco segmentos

la cabeza (segmento N-1). En la figura 3.1 se ha dibujado un gusano longitudinal de 5 segmenos, que se encuentra en reposo. Los segmentos son contráctiles y retráctiles de manera que se pueden contraer y expandir una distancia máxima A, denominada *contracción máxima*.

Todos los segmentos son exactamente iguales, con la misma masa y propiedades mecánicas y están unidos unos a otros sólidamente, no pudiendo separarse. También supondremos que ninguna fuerza externa puede alterar su estado de contracción. Este estado es interno al gusano y no impuesto por fuerzas externas.

3.2.1.1. Parámeros de los segmentos

Los segmentos vienen caracterizados por los siguientes parámetros:

1. **Parámetros estáticos**. Son iguales para todos los segmentos y siempre permanecen con el mismo valor, no varían con el tiempo.

   a) L_0: **Longitud natural** o **longitud en reposo**. Es la longitud del segmento cuando no está contraido ni expandido.

   b) **A: Contracción máxima**: Es la máxima longitud que se puede contraer o expandir el segmento con respecto a la posición de equilibrio.

2. **Parámetros dinámicos**. Dependen del instante de tiempo y de cada segmento

   a) $l_i(t)$**: Longitud del segmento i** en el instante de tiempo t. Su valor está comprendido en el intervalo $[L_0 - A, L_0 + A]$.

   b) $c_i(t)$**: Contracción del segmento i** en el instante t. Indica el estado de contracción del segmento y se calcula como la diferencia entre la longitud natural y la longitud instantánea:

   $$c_i(t) = L_0 - l_i(t) \tag{3.1}$$

   Teniendo en cuenta los valores máximos y mínimos que puede tomar la longitud, la *contracción* tiene un valor que varía entre $-A$ y A. Una *contracción* negativa implica una expansión.

En la figura 3.2 se muestra gráficamente lo que indica cada uno de los parametros en un segmento. La longitud y la contracción están relacionadas por la constante L_0 (ec. 3.1) y las dos dan una indicación de cuánto se ha comprimido el segmento, en relación con la longitud natural.

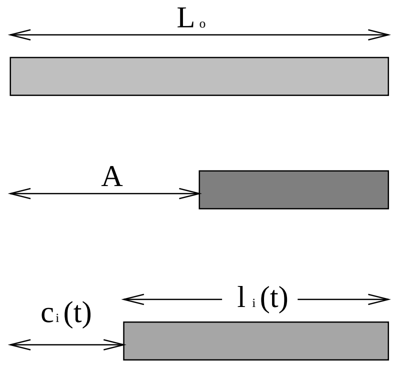

Figura 3.2: Parámetros estáticos y dinámicos de un segmento i.

3.2.1.2. Parámetros del gusano

Hay parámetros globales del gusano que integran toda la información de los diferentes segmentos. Nuevamente son de dos tipos, los estáticos y los dinámicos.

1. **Parámetros estáticos**. No varían con el tiempo.

   a) **N**: **Número de segmentos** que componen el gusano

   b) L_{T_0}**: Longitud total en reposo** o **longitud total natural**. Es la longitud del gusano cuando todos sus segmentos se encuentran en reposo. Puesto que todos son iguales, se calcula como:
   $$L_{T_0} = NL_0 \tag{3.2}$$

   c) A_T : **Contracción máxima**. Valor máximo que se puede contraer o expandir el gusanor, con respecto a la longitud total natural. Se puede calcular a partir de los segmentos como:
   $$A_T = NA \tag{3.3}$$

2. **Parámetros dinámicos**. Dependen del instante de tiempo

   a) $L_T(t)$**: Longitud total** del gusano en el instante t. El valor oscila entre $L_{T_0} - A_T$ y $L_{T_0} + A_T$. Este parámetro se puede expresar en función de los parámetros de los segmentos como:
   $$L_T(t) = \sum_{i=0}^{N-1} l_i(t) \tag{3.4}$$

   b) $C(t)$: **Contracción del gusano** en un instante, cuyo valor pertenece al intervalo $[-A_T, A_T]$ y se define como la diferencia entre la longitud total natural y la instantánea:
   $$C(t) = L_{T_0} - L_T(t) \tag{3.5}$$

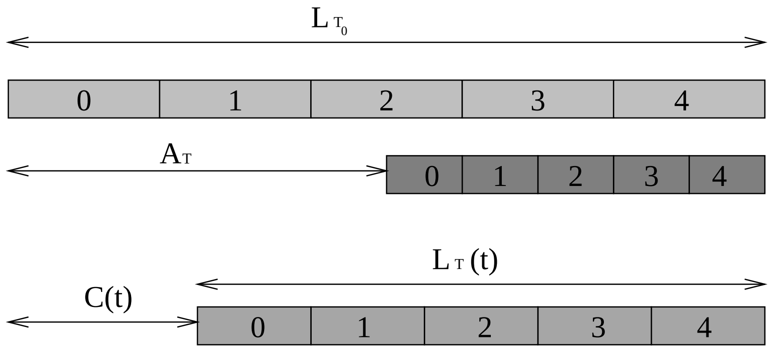

Figura 3.3: Parámetros estáticos y dinámicos de un gusano

La contracción total también se puede obtener como la suma de las contracciónes de cada segmentos:

$$C(t) = \sum_{i=0}^{N-1} c(t) \tag{3.6}$$

En la figura 3.3 se muestran todos los parámetros globales del gusano.

3.2.2. Caracterización

Por caracterización entendemos la información mínima necesaria para describir el modelo de gusano, de manera que a partir de un gusano se puedan obtener los parámetros de caracterización y a la inversa, a partir de la caracterización se pueda obtener el gusano resultante. La caracterización nos indica qué variables son necesarias para conocer el estado del gusano.

3.2.2.1. Caracterización de los segmentos

El estado de un segmento viene determinado por su longitud instantánea. Para describirlo emplearemos el parámetro dinámico *contracción*. De manera que dado un segmento i con una contracción $c_i(t)$, sabemos que su longitud en cualquier instante de tiempo es:

$$l_i(t) = L_0 - c_i(t)$$

Cuando $c_i(t) = 0$, el segmento se encuentra en reposo (la longitud es L_0). Si es positivo está contraído y si es negativo está expandido.

3.2.2.2. Caracterización del gusano

Para tener caracterizado al gusano basta con conocer la longitud $l_i(t)$ de cada segmento en cada instante de tiempo. En un instante dado, cada segmento tendrá una longitud. A partir de ellos obtenemos el estado global. Definimos el **vector de estado E** como un vector de N componentes, cada una de las cuales es la contracción del segmento correspondiente. Es decir:

$$E = (c_0(t), c_1(t), ..., c_{N-1}(t)) \tag{3.7}$$

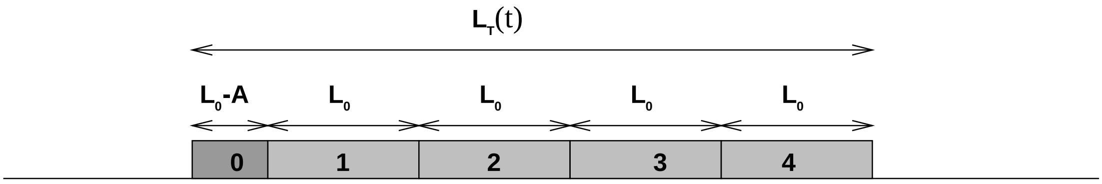

Figura 3.4: Gusano longitudinal con un vector de estado de (A,0,0,0,0)

Todos los parámetros del gusano quedan inequivocamente definidos mediante su vector de estado. Así por ejemplo, un gusano con un vector de estado E=(0,0,0,0,0) sabemos que está en reposo y que su longitud es la natural (L_{T_0}). Es el vector que caracteriza en ese instante al gusano de la figura 3.1. El gusano dibujado en la figura 3.4 tiene un vector de estado de (A,0,0,0,0) que indica que el segmento 0 está totalmente contraído y que el resto están en reposo. La contracción del gusano es $C(t) = A$ y su longitud total:

$$L_T(t) = L_{T_0} - A$$

3.2.3. La función de contorno

Hasta aquí tenemos caracterizado el estado del gusano para un instante concreto, mediante el vector de estado E. El movimiento se caracteriza por una serie de vectores de estado que se van sucediendo en el tiempo. Más adelante se tratará en profundidad este tema y para ello necesitamos el concepto de *función de contorno*.

La **función de contorno**, denotada por la letra F, es una función $F : \Re \rightarrow \Re$, que particularizada en los puntos $i \in \{0...N-1\}$ nos permite conocer el vector de estado:

$$E(t) = (F(0), F(1), F(2), ..., F(N-1))$$

Esta función es estática y no depende del tiempo. Nos está dando en vector de estado en el instante inicial. A partir de ella definiremos más adelante la función de propagación, $P(x,t)$, que es la misma función de contorno que se va propagando con el tiempo. Estos conceptos se comprenderán mejor más adelante.

En la figura 3.5 se muestra una función de contorno de tipo triangular y se ha dibujado el gusano asociado. El efecto de contracción de los diferentes segmentos se ha resaltado dibujándolos más oscuros cuando más comprimidos están. El vector de estado determinado por esta función de contorno es el : $(0, A, 0, \frac{A}{2}, 0)$.

Dada una función de contorno F, queda perfectamente caracterizado el gusano en el instante inicial, pues se conoce el vector de estado. Sin embargo, dado un vector de estado, hay infinitas funciones de contorno que lo pueden determinan. No obstante, La relación entre función de contorno y evolución de los estados internos del gusano es 1:1, es decir, dada una función de contorno existe una única evolución interna y para cada evolución interna posible existe una única función de contorno. Más adelante se comprenderá mejor esta idea.

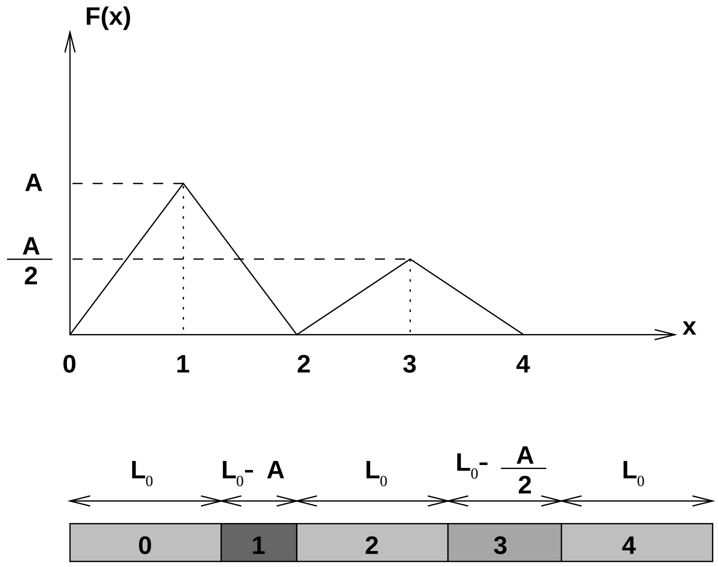

Figura 3.5: Una función de contorno triangular y el estado del gusano

Denominaremos **zona activa** de la función de contorno a todos los puntos sobre el eje x que están comprendidos entre el punto x inicial y el punto x final de la función de contorno. En el caso de la figura 3.5 la zona activa es el intervalo [0,4].

3.2.4. Secuencias y evolución de los estados

Hasta ahora hemos caracterizado al gusano en un instante de tiempo t dado. El movimiento del gusano es una evolución desde un estado inicial hasta otro final. Cada instante de tiempo define un estado del gusano. Esta evolución puede ser continua, en ese caso hablamos de **movimiento continuo**, pero puede ser discreta si los vectores de estado no evolucionan continuamente, sino que lo hacen discretamente. En ese caso el movimiento entre el estado inicial y final queda determinado por una sucesión finita de estados: **secuencias**.

Al hablar de **secuencias** entenderemos que es *un conjunto finito de vectores de estado, que se suceden en el tiempo, desde el vector inicial hasta el final*.

3.3. Caracterización del movimiento de avance

3.3.1. Definición de avance

Ya tenemos parametrizado el gusano. En este apartado estudiaremos qué debe ocurrir para que exista un movimiento de avance. Empezaremos por definir lo que se entendemos por avance:

Sea un gusano longitudinal que inicialmente se encuentra en el estado determinado por el vector $E(t_1)$ ***y que evoluciona hasta llegar al estado caracterizado por***

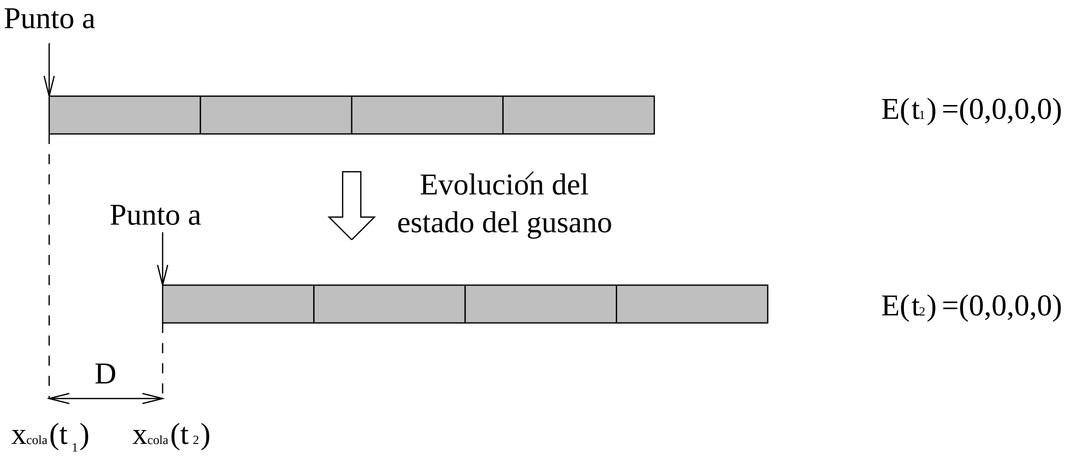

Figura 3.6: Un ejemplo de avance de un gusano longitudinal una distancia D

$E(t_2)$***. Diremos que el gusano ha avanzado una distancia D hacia la derecha si se cumplen las siguiente condiciones:***

1. $E(t_1) = E(t_2)$
2. $x_{cola}(t_2) - x_{cola}(t_1) = D$***, siendo*** $x_{cola}(t)$ ***la coordenada x del extermo izquierdo de la cola en el intante t***.

La primera condición nos está indicando que el estado final sea igual al inicial. Esto es necesario para poder comparar ambos gusanos. Si están en estados diferentes es difícil establecer cuánto ha avanzado el gusano entero. La segunda condición establece que el punto extremo de la cola (punto izquierdo) debe haber avanzado una distancia D, es decir, que su coordenada x en el estado final es D unidades mayor que en el estado inicial. Por estar los gusanos en el mismo estado tanto al principio como al final, esta segunda condición también la cumplen el resto de puntos del gusano.

En la figura 3.6 se ha dibujado un gusano longitudinal de cuatro segmentos que ha avanzado una distancia D. En el instante t_1 el gusano está en el estado inicial, con un vector $E(t_1) = (0, 0, 0, 0)$ y en el t_2 se encuentra en el estado final, con $E(t_2) = (0, 0, 0, 0)$. La primera condición se cumple. El extremo de la cola se ha denominado como **punto a**. En el estado final su coordenada x ha aumentado en D. Se cumple la condición 2, por lo que podemos afirmar que ha avanzado una distancia D.

3.3.2. Un gusano longitudinal que avanza

En la figura 3.7 se presenta un gusano longitudinal, de tres segmentos, que ha avanzado una distancia A. Podemos hablar de avance porque se cumple la definición dada en el apartado 3.3.1. La evolución desde el estado $E(t_1)$ hasta el $E(t_5)$ es continua pero para poder visualizarla se han tomado "fotos" en los instantes t_1, t_2, t_3, t_4 y t_5 y se muestra el vector de estado de cada instante. Sobre este gusano se han definido dos puntos, el a y el b. El punto a es el que nos permite

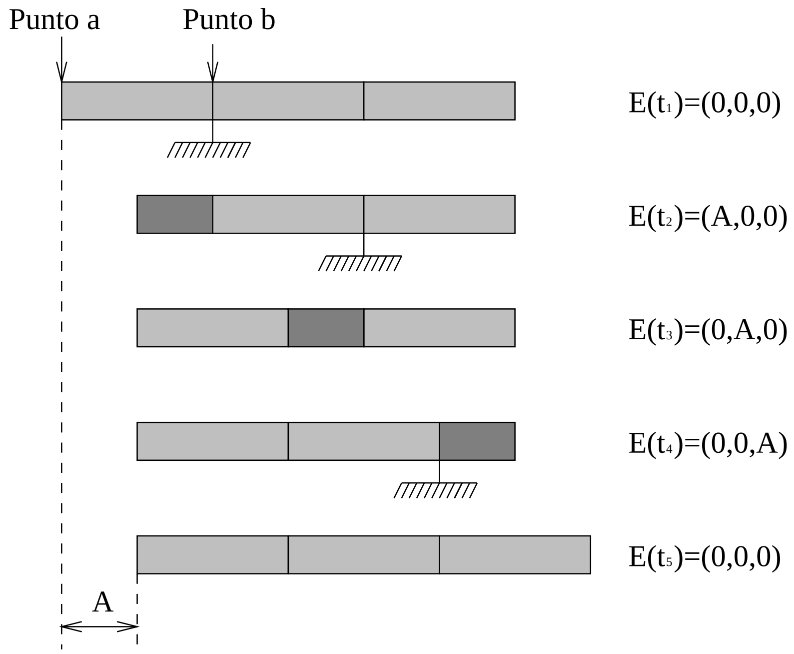

Figura 3.7: Un gusano longitud que avanza, con sus vectores de estado en ciertos instantes

garantizar que se cumple la definición de avance, puesto que vemos que se ha desplazado A unidades hacia la derecha. El punto b es un punto de prueba que se empleará para realizar el razonamiento que sigue.

Estudiemos con detenimiento qué es lo que está ocurriendo en este avance. Hay tres ideas básicas, ocultas en el dibujo:

1. **Existe una evolución interna de los estados**. Esto parece una trivialidad, pero si no existiese esta evolución, no habría movimiento de avance. Podemos hablar de evolución cuando hay al menos dos estados diferentes. Si el gusano siempre permanece en el mismo estado, para todo instante de tiempo, no avanzaría nunca.

2. **La evolución de los estados es correcta**. No sólo debe haber una evolución, sino que debe ser la correcta. Existen evoluciones que no dan lugar a movimiento de avance, como por ejemplo la que se muestra en la figura 3.8.

3. **Determinación de la condición externa correcta**. Además de que haya una evolución interna y que ésta sea correcta, hay que garantizar que se cumple una condición externa adecuada. En el ejemplo de la figura 3.7, en la transición entre los estados $E(t_1)$ y $E(t_2)$, la condición externa que se ha aplicado es que la coordenada x del punto b permanezca constante durante toda la evolución, es decir, que el punto b debe permanecer "fijado" a la superficie de avance durante toda la evolución, por los mecanismos que sean. En la figura 3.9 se ha dibujado el mismo gusano, en el que se produce la misma evolución interna que en el de la figura 3.7(Todos los estados son exactamente iguales en ambos gusanos) pero por el hecho de aplicarse otra condición externa, el movimiento de avance no ocurre.

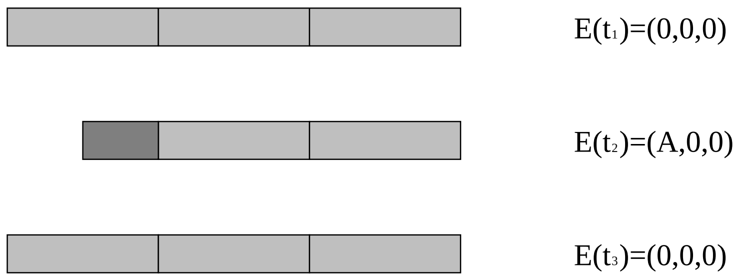

Figura 3.8: Gusano que evoluciona de una manera incorrecta, por lo que no avanza

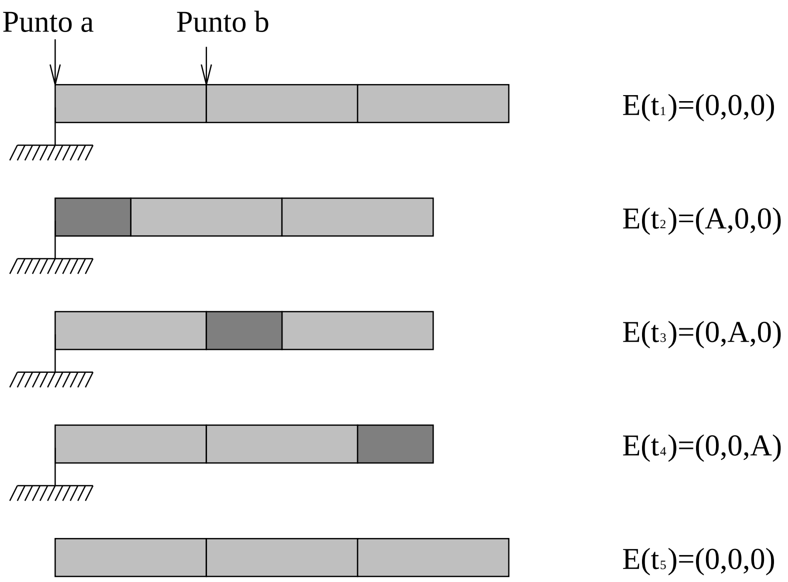

Figura 3.9: Gusano que no avanza porque no se cumple la condición externa adecuada

La condición externa es que la coordenada x del punto a permanece contante, en vez de hacerlo la b, durante la transición entre $E(t_1)$ y $E(t_2)$.

3.3.3. Las tres reglas del avance

Por lo que hemos visto en el apartado anterior, el movimiento de avance queda caracterizado por tres reglas que siempre se deben cumplir. Estas reglas son muy genéricas y a lo largo de este capítulo se irán especificando con má detalle.

Las tres reglas que caracterizan el avance son*:*

- ***Regla 1****: Para que exista avance debe existir una evolución de los estados del gusano*
- ***Regla 2****: La evolución se debe realizar de una manera correcta.*
- ***Regla 3****: Debe existir una condición externa adecuada*

Cada regla nos genera una pregunta, a la que hay que contestar.

- **Pregunta 1**: Según la regla 1 debe existir evolución. ¿Cómo generar esa evolución?
- **Pregunta 2**: Según regla 2 la evolución debe ser correcta: ¿Qué condición interna debe cumplir la evolución para que sea correcta?
- **Pregunta 3**: La regla 3 afirma que debe existir una condición externa: ¿Qué condicion externa se debe cumplir?

Respondiendo a esas preguntas podremos conocer los mecanismos que hacen posible que el gusano longitudinal avance y de esa manera se podrá llevar a la práctica.

Las preguntas 2 y 3 hablan de condiciones. Denominaremos **condiciones internas** a las que se definen sobre los parámetros internos del gusano y **condiciones externas** las que se aplican sobre variables externas, como por ejemplo la coordenada x de los puntos del gusano.[1]

Las condiciones 2 y 3 están relacionadas. Cualquier evolución interna puede dar lugar a desplazamiento siempre y cuando se den las condiciones externas adecuadas. Por ejemplo, ¿puede una evolución aleatoria hacer que el gusano avance?. La respuesta es "depende de las condiciones externas que se impongan". La condición externa más común es que exista rozamiento con la superficie, de manera que en esas condiciones cualquier evolución interna no genera movimiento de avance.

3.4. Modelo de evolución: propagación de ondas

En este apartado nos centraremos en cómo modelar la evolución de los estados, es decir, en dar una respuesta a la pregunta 1, asociada a la regla de movimiento 1.

Sabemos por el apartado 3.2.3 que una función de contorno F nos está determinado el estado del gusano. Apliquemos ahora la idea de propagación de perturbaciones que se vió en el capítulo 2. Consideremos la perturbación P(x,t) que se obtiene moviendo la función F hacia la derecha a una velocidad v:

$$P(x,t) = F(x - vt)$$

El vector de estado que se obtiene es:

$$E(t) = (P(0,t), P(1,t), ..., P(N-1,t)) = (F(vt), F(1-vt), ...F(N-1-vt))$$

Este vector varía con el tiempo y depende de un nuevo parámetro que es la velocidad de propagación.

El efecto lo podemos ver en la figura 3.10. En la parte de la izquierda se muestra la función de contorno inicial, en un instante de tiempo t_1. El vector de estado es: $E(t_1) = (0, A, 0, 0, 0)$. El valor de la contracción es $C(t_1) = A$. En la parte de la derecha aparece la misma función

[1]Cualquier variable no defi nida en el apartado 3.2 será considerada externa, puesto que no está relacionada con los estados internos del gusano

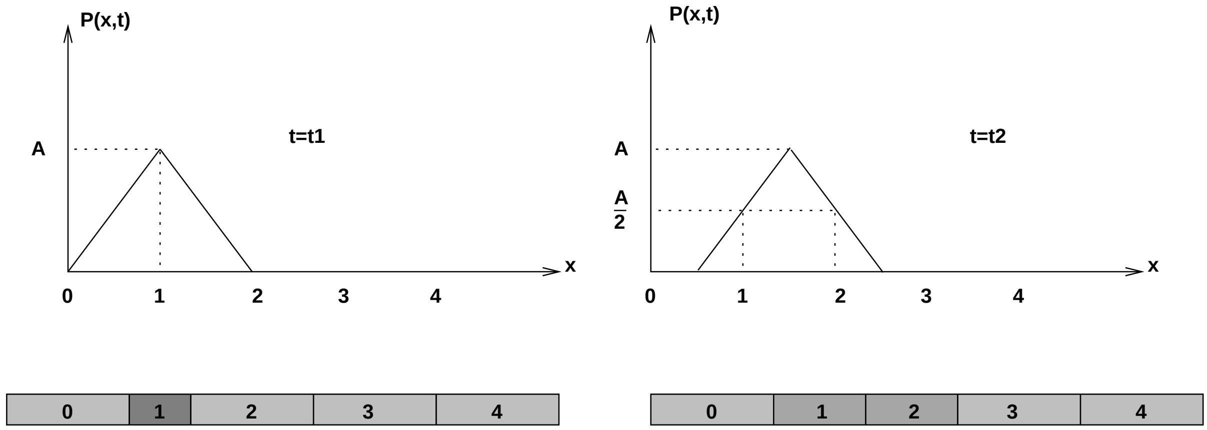

Figura 3.10: Propagación de la función de contorno

de contorno que se ha desplazado 0.5 unidades hacia la derecha. El nuevo vector de estado es $E(t_2) = (0, \frac{A}{2}, \frac{A}{2}, 0, 0)$ y la nueva contracción: $C(t_2) = \frac{A}{2} + \frac{A}{2} = A$.

Al irse propagando la onda se van sucediendo los diferentes estados del gusano. Si el segmento i se encuentra dentro de la *zona activa* de la función de contorno, en un instante t, el rango de valores $\{P(x,t)/x > i\}$ es la **historia pasada** del segmento, es decir, los valores de la contracción que ha tenido en el pasado, y el rango $\{P(x,t)/x < i\}$ es la **historia futura**, los valores de la contracción en el futuro. El valor $P(i,t)$ es el **valor presente**.

En la figura 3.11 se muestra un gusano de cinco segmentos que ha avanzado. La evolución es continua pero para visualizarla se ha representando el estado en siete instantes de tiempo diferentes ($t_1 - t_7$) y se ha dibujado la función de contorno. Inicialmente todos los segmentos se encuentra en reposo, con un estado E=(0,0,0,0,0). En el instante t_2, el segmento 0 se encuentra contraido. Al avanzar la función de contorno se va expandiendo a la vez que el segmento 1 se va contrayendo, obteniéndose el estado (0,A,0,0,0) en el instante t_3. La evolución continúa alcanzando sucesivamente los estados (0,0,A,0,0), (0,0,0,A,0), (0,0,0,0,A), (0,0,0,0,0) en los instantes t_4, t_5, t_6 y t_7 respectivamente.

El hacer evolucionar el gusano es muy sencillo de esta manera. Basta con tener definida una función de contorno F en un instante inicial e ir propagándola, obteniéndose los estados internos que componen la evolución. Con esto queda respondida la pregunta 1 formulada en el apartado 3.3.3 y se cumple la regla 1 de la caracterización del avance.

3.5. Condiciones externas

3.5.1. Objetivos

En esta sección se analizan las condiciones externas, para responder a la pregunta 3 y poder garantizar la regla 3 de la caracterización del avance.

El gusano está apoyado sobre una superficie por la que se desplaza. Debido a factores externos, como la fuerza de rozamiento, irregularidades,etc. aparecen restricciones sobre los puntos

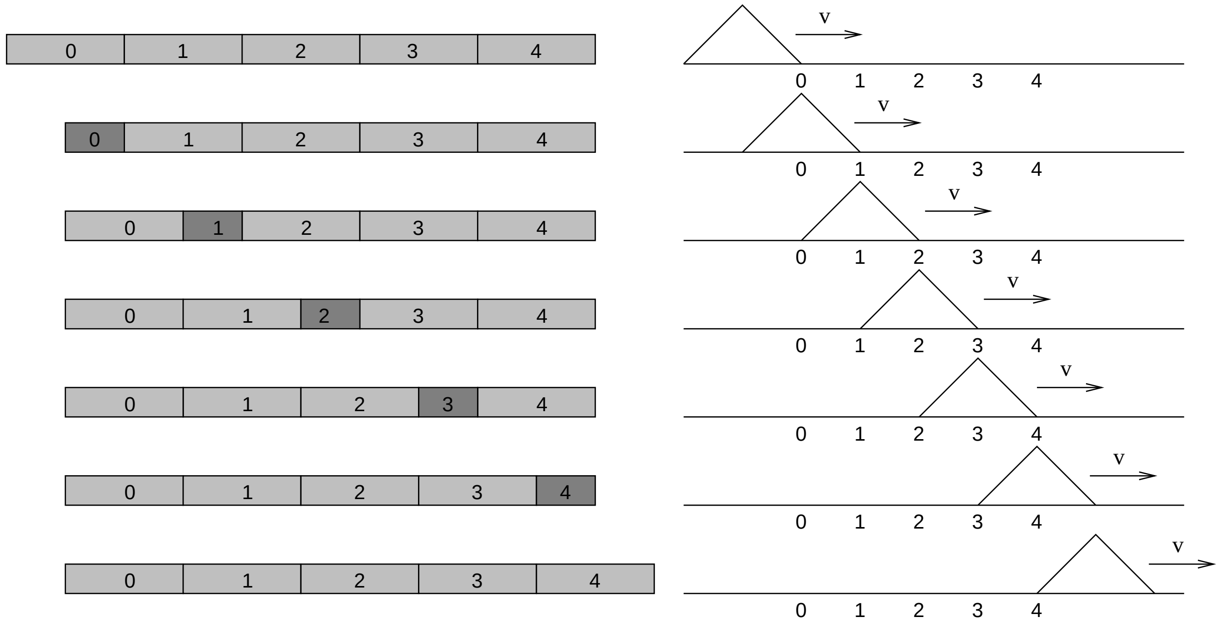

Figura 3.11: Movimiento de un gusano similar a una lombriz de tierra

del gusano. Siempre van a existir estas codiciones externas.

Hay que encontrar qué **condiciones externas** son las que garantizan que el gusano pueda avanzar. De todas estas condiciones hay que encontrar la **menos restrictiva**, la que involucre el menor número de puntos del gusano y la **más óptima**, que garantice que el avance es el máximo.

Antes de enunciar esta condición son necesarias algunas definiciones.

3.5.2. Definiciones

En el apartado 3.2.3 se definió lo que es la **zona activa** de una función de contorno. Sea la función de contorno F y un instante de tiempo t, denotaremos por **ZA(F,t)** a la zona activa de la función F en ese instante. Vemos que según se va propagando la función de contorno, su zona activa también lo va haciendo.

De todos los segmentos del gusano, sólo los que tienen su número i dentro de la zona activa están evolucionando, el resto permanecen en el mismo estado. Definimos el **conjunto de segmentos activos** para una función de contorno F y un instante t, y lo denotamos por $S_A(F,t)$ como:

$$S_A(F,t) = \{i \in \{0,..,N-1\} / i \in ZA(F,t)\} \tag{3.8}$$

El número de segmentos activos depende de la anchura de la función de contorno. Puede haber ninguno, uno, dos,...,M segmentos activos en un instante. El segmento activo que tiene el menor número se denomina **segmento activo menor** y se representa por las letras **sam**. El segmento activo con el mayor número es el segmento activo mayor, **SAM**.

Un segmento i tiene un punto en cada extremo que los denominaremos punto izquierdo $I(i)$ y punto derecho $D(i)$. Cada uno tiene una coordenada en el eje de las x, que se denotan así:

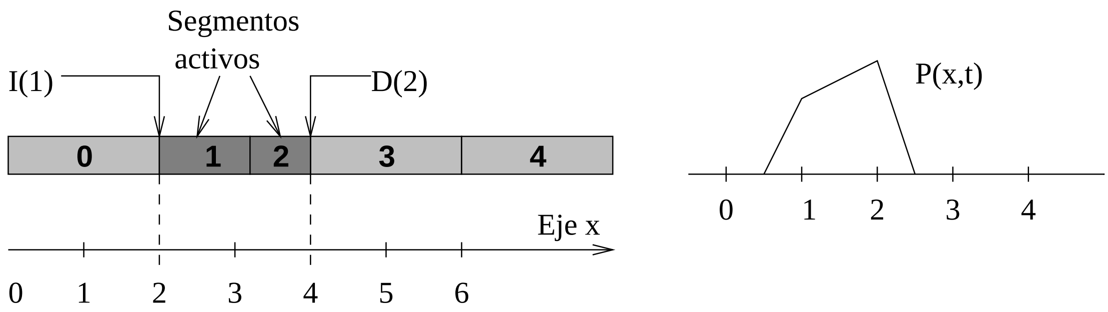

Figura 3.12: Un gusano en un instante t con los segmentos 1 y 2 activos

- $x_I(i,t)$: Coordenada x del punto izquierdo del segmento i, en el instante t.
- $x_D(i,t)$: Coordenada x del punto derecho del segmento i en el instante t.

En la figura 3.12 se ha dibujado un gusano de cinco segmentos, en un instante t en el que los segmentos 1 y 2 están activos y el resto no. Obtenemos la siguiente información:

- *Zona activa*: ZA(F,t)=[0.5,2.5]
- *Segmentos activos*: SA={1,2}
- sam=1 y SAM=2
- $x_I(1,t)$ =2 y $x_D(1,t)$ =4

3.5.3. Regla de no retroceso

Con estas definiciones ya podemos establecer la condición externa que se debe cumplir, que la denominaremos como **regla de no retroceso**, y se enuncia así:

$$\forall t \in \Re, \forall i \in [0,...,N-1], \textbf{\textit{(i=sam}} \Rightarrow x_I(i,t) = cte\textbf{\textit{)}} \bigvee \textbf{\textit{(i=SAM}}\Rightarrow x_D(i,t) = cte\textbf{\textit{)}}$$

que dicho con palabras:

> *"Durante toda la evolución, se tiene que cumplir al menos alguna de las siguientes condiciones:*
>
> - *Si un segmento i es el segmento activo menor, entonces su coordenada x del punto izquierdo debe permanecer constante.*
> - *Si un segmento i es el segmento activo mayor, su coordenada x del punto derecho debe permancer constante."*

Esta regla sólo tiene sentido para funciones de contorno en las que la longitud de la zona activa sea mayor o igual a dos. En estos casos podemos garantizar siempre que $sam \neq SAM$.

El que la coordenada x de un punto permanezca constante quiere decir que el punto debe estar fijado a la superfie, es decir, que no se puede mover. **Es un punto de apoyo**. Esta regla nos dice que en todo momento al menos tiene que existir un punto de apoyo, que no puede retroceder. Según qué segmentos estén activos, el punto de apoyo es uno u otro.

Esto es muy similar al movimiento de andar de los hombres. Cuando se apoya el talón para avanzar, éste queda fijado al suelo y no retrocede.

En la figura 3.13 se muestran ocho instantes de tiempos en el avance de un gusano de tres segmentos. Se puede ver cómo van variando los puntos de apoyo. Por la condición de no retroceso, cuando existen dos puntos de apoyo, al menos uno tiene que quedar fijado a la superficie de avance.También se pueden ver el segmento menor y el mayor en cada instante. Obsérverse que en el instante t_1 el sam y el SAM valen -2 y -1 respectivamente. Esto no se corresponde con ningún segmento. El sam y SAM sólo son válidos cuando pertenecen al intervalo [0,..,N-1], sin embargo es necesario que tengan valores fuera de ese entorno para evitar ambigüedades. Por ejemplo, en el instante t_7, el sam es el segmento 2 y el SAM el 3, que no existe. Si el segmento vitual 3 no se considerase, ¿sería el segmento 2 el sam o el SAM? Puesto que en este caso en la zona activa sólo habría un segmento, sería a la vez el sam y el SAM lo que no puede ocurrir.

A partir de ahora asumiremos que siempre se cumple la regla de no retroceso.

3.6. Condiciones internas

3.6.1. Objetivos

Según la regla 2, la evolución se debe realizar de una manera correcta. Y esto hace que nos preguntemos ¿Qué condición interna debe cumplir la evolución para que sea correcta?. Sabemos que la evolución se caracteriza por la función de contorno. La pregunta se puede reformular de otra manera:

> ***¿Qué condiciones debe cumplir la función de contorno para que produzca una evolución correcta?***

Hablar de evolución correcta implica que no se entre en contradicción con las condiciones externas y que se genera movimiento de avance. En este apartado se responderá a esta pregunta.

3.6.2. Regla de avance

Vamos a observar cómo se mueve un gusano para extraer conclusiones. Fijémonos en cómo avanza el gusano de cinco segmentos de la figura 3.11. Vemos la evolución en siete instantes de tiempo diferentes $t_1 - t_7$. En todos ellos hay un segmento activo cuya contracción es máxima (El máximo de la función de contorno está sobre el número del segmento). Fijémonos en la longitud total del gusano. Podemos distinguir tres fases:

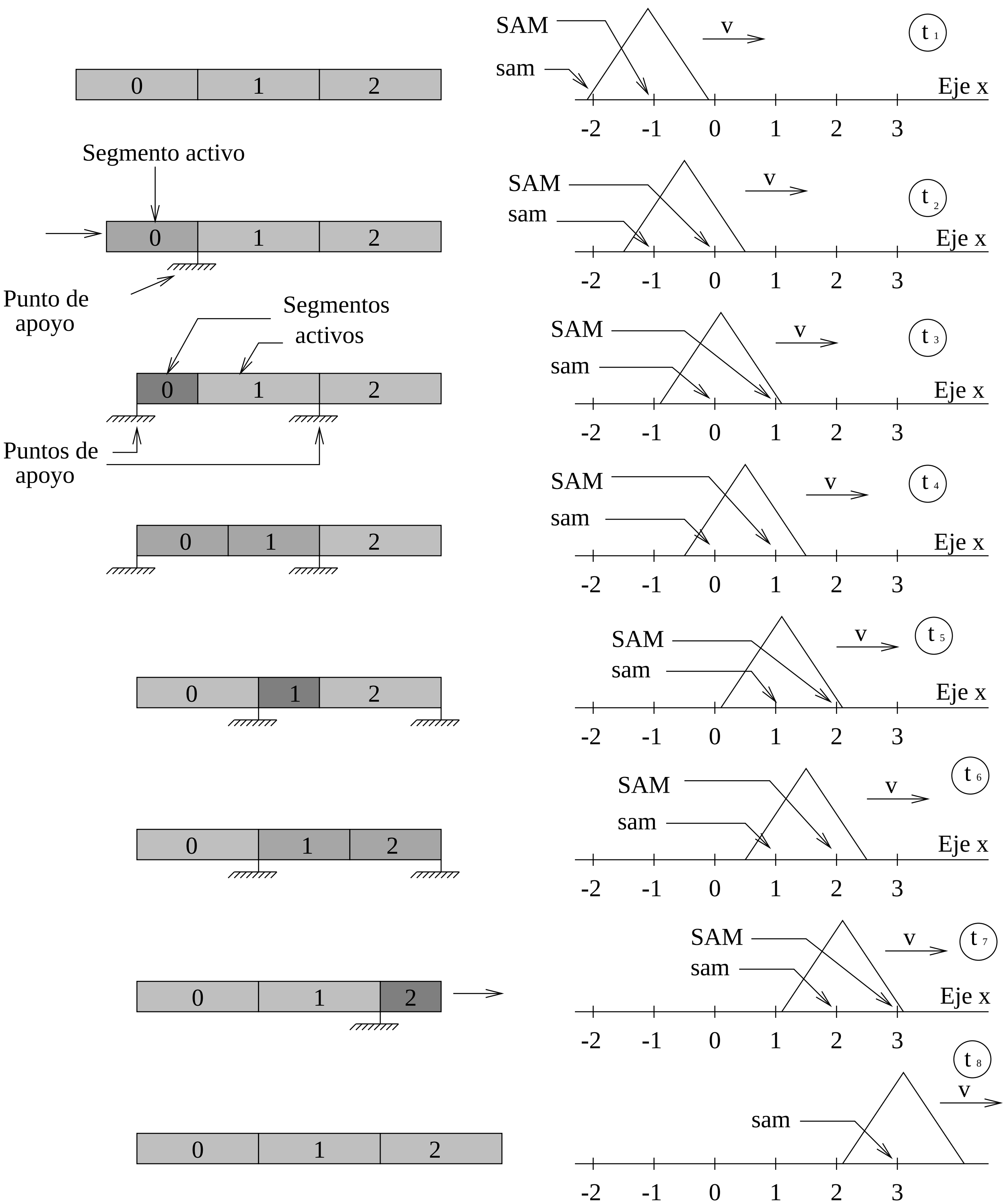

Figura 3.13: Gusano de tres segmentos que avanza, en el que se ve la evolución de los puntos de apoyo

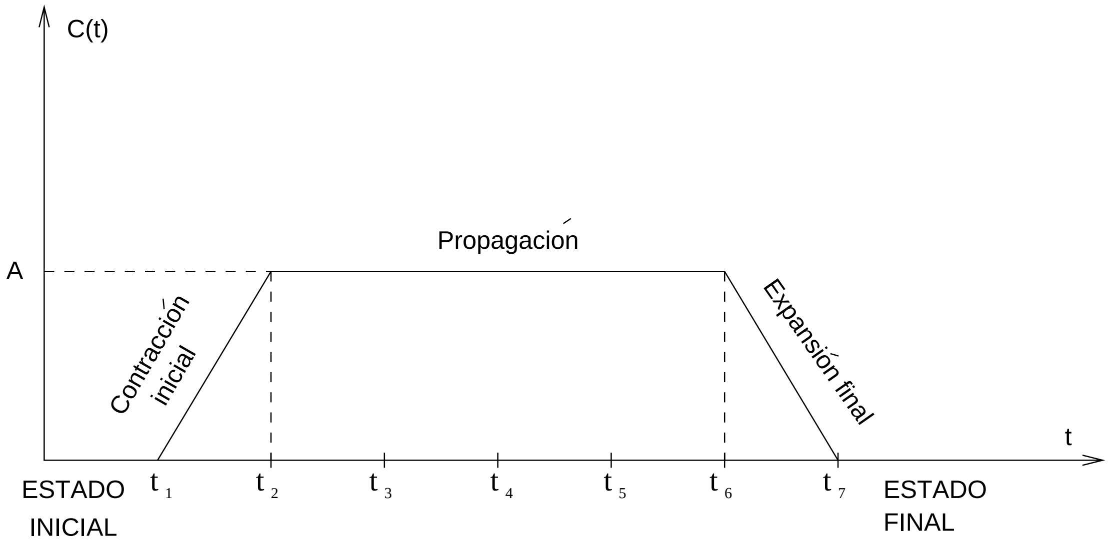

Figura 3.14: Evolución de la contracción total del gusano de la figura 3.11.

1. Entre los **instantes** t_1 **y** t_2: Hay una **contracción inicial**. El gusano tiene una longitud menor que la inicial.

2. **Instantes** $t_2 - t_6$: La longitud del gusano permanece constante. Pero hay una **propagación** del estado de contracción.

3. **Instantes** $t_6 - t_7$: Hay una expansión final, con lo que el gusano vuelve a recuperar la longitud inicial.

Si representamos en una gráfica la evolución del parámetro contracción total C(t) en función del tiempo obtenemos una gráfica como la de la figura 3.14. Las tres fases las denominaremos **contracción inicial**, **propagación** y **expansión final**. El que la longitud del gusano permanezca constante durante la propagación es una propiedad muy interesante. Obsérvese que los segmentos no activos no sufren ningún tipo de desplazamiento, se quedan donde están, por lo que no generan rozamiento con la superficie. Los segmentos activos sí se desplazan sobre la superficie por lo que el gusano tendrá que desarrollar mecanismos para evitarlo (como por ejemplo elevar un poco los segmentos activos sobre la superficie).

Esta propiedad tan interesante es la **regla de avance** y dice:

> ***Si la función de contorno hace que la contracción total permanezca constante durante la fase de propagación, la evolución será correcta***.

Obsérvese que esta regla no tiene por qué ser la única posibilidad. Lo que nos interesa para este proyecto es saber que si se cumple, la evolución será correcta, pero no podemos asegurar que todas las evoluciones correctas cumplan esta regla.

La regla de avance nos permite distinguir entre funciones de contorno “correctas” y no correctas. Imaginemos que la función de contorno para un gusano de tres segmentos fuese rectangular,

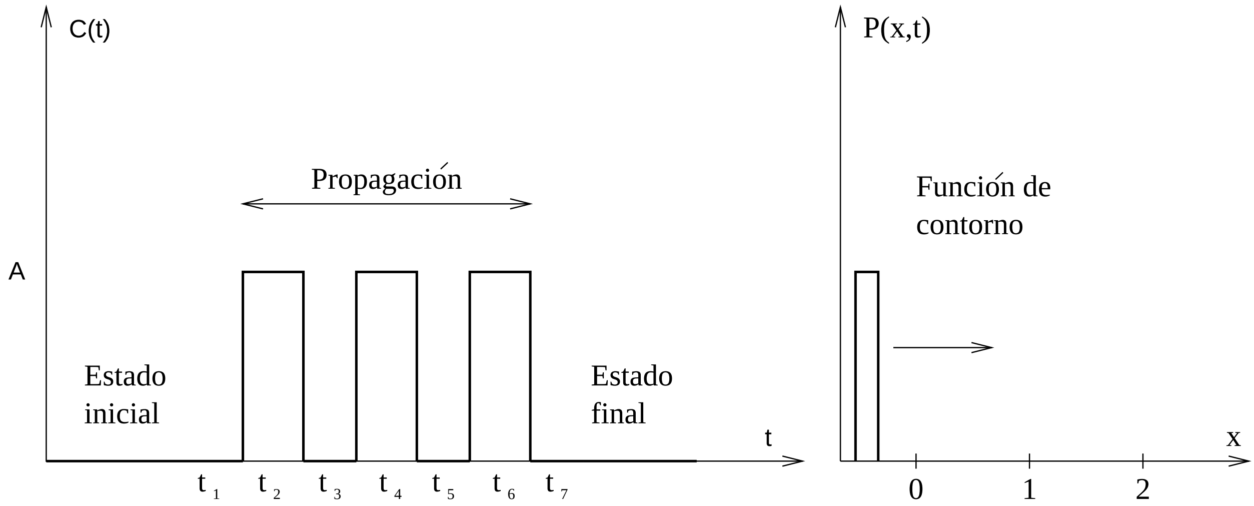

Figura 3.15: Función de contorno que no cumple la regla de avance

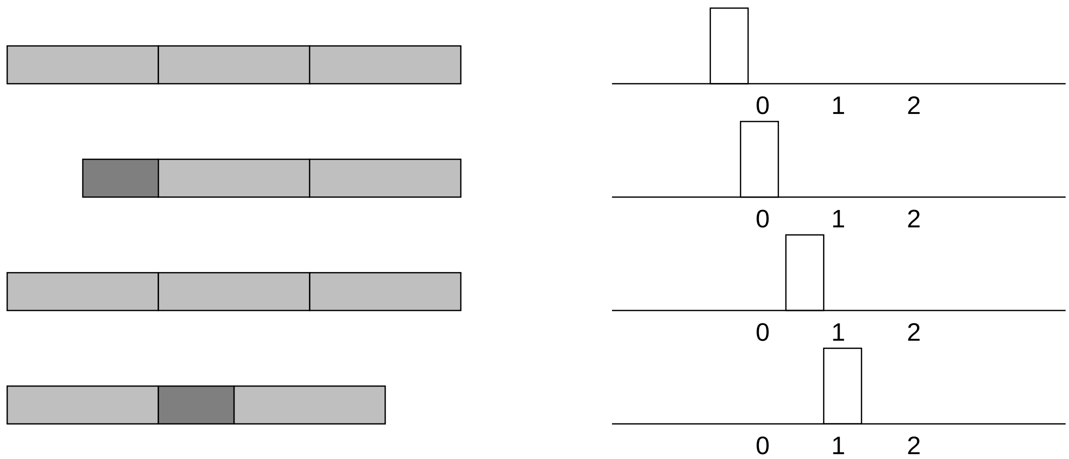

Figura 3.16: Función de contorno cuadrada

de altura A y con una anchura de la zona activa menor que la unidad. La contracción varía entre 0 y A y no permanece constante durante la propagación. En la figura 3.15 se ha representando la contracción total y la función de contorno en el instante inicial t_1. El movimiento de este gusano es indeterminado y depende de las condiciones externas. En la figura 3.16 se ha dibujado una posible evolución del sistema, en la que se ve cómo varía la longitud total del gusano según se desplaza la función de contorno. Inicialmente está fuera del intervalo del gusano [0,2]. Cuando alcanza al segmento 0, éste se contrae. Al situarse la función de contorno entre los puntos $x = 0$ y $x = 1$, el segmento 0 se vuelve a expandir. El problema surge cuando la zona activa alcanza al punto $x = 1$. En ese momento el segmento se contrae, por lo que pueden ocurrir varias situaciones: que el segmento 0 permanezca fijado a la superficie y sea el 2 el que se arrastre, lo contrario o una situación intermedia. Depende de las condicioens externas y no es predecible.

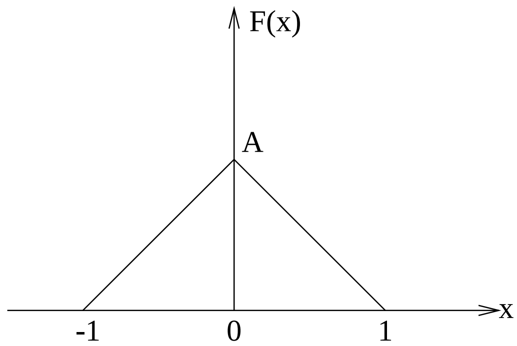

Figura 3.17: Función de contorno que cumple la proposición de avance

3.6.3. La función de contorno triangular

3.6.3.1. Presentación

¿Qué funciones de contorno cumplen la regla de avance? En la figura 3.17 se muestra una función de contorno triangular que la cumple. Se trata de una función triangular, totalmente simétrica y con pendientes A y -A. La anchura de la zona activa es de 2 unidades. El valor máximo de esta función es A, la contracción máxima de los segmentos. No tiene sentido que este valor sea superior a A, puesto que los segmentos no se pueden contraer más.

No es el objetivo de este proyecto el investigar sobre qué otras funciones de contorno cumple esta regla. Con encontrar una y demostrarlo es suficiente para poder implementar gusanos de este tipo.

3.6.3.2. Demostración

Para demostrar que cumple la regla de avance primero la definimos analiticamente:

$$F(x) = \begin{cases} A(x+1) & x \in [-1, 0) \\ A(x-1) & x \in [0, 1] \end{cases}$$

Para convertir esta función en una onda, sustituimos la x por $x - vt$, lo que nos da:

$$P(x,t) = \begin{cases} A(x - vt + 1) & x - vt \in [-1, 0) \\ A(x - vt - 1) & x - vt \in [0, 1] \end{cases}$$

Esta nueva función es la función original $F(x)$ que se desplaza hacia la derecha a una velocidad v. Para cada instante de tiempo indica la contracción de cada segmento a los que afecta. Para que se cumpla la proposición de avance, la contracción $C(t)$ debe ser constante para todo t dentro del *intervalo de propagación*, definido en el apartado 3.2.3.

Por tener la función de contorno una anchura de 2, La *zona activa* siempre involucra a dos segmentos a la vez, un segmento en expansión y otro en contracción. Para que la suma sea constante, lo que se expande uno se debe contraer el otro. Calculando la derivada de $P(x,t)$ se

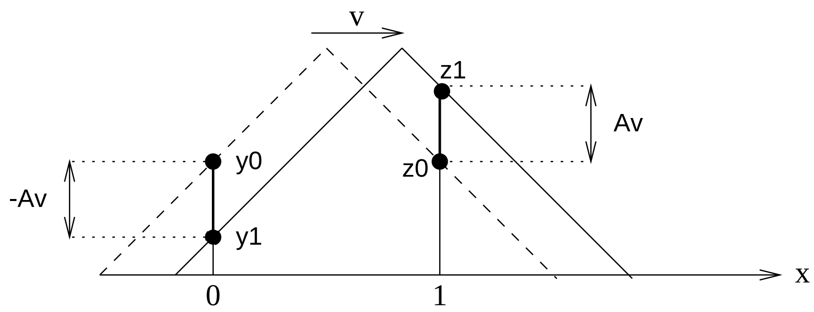

Figura 3.18: La función de contorno triangular al desplazarse cumple la proposición de avance.

obtiene cuánto ha variado cada segmento al variar el tiempo:

$$\frac{dP(x,t)}{dt} = \begin{cases} -Av & x - vt \in [-1, 0) \\ Av & x - vt \in [0, 1] \end{cases}$$

y precisamente se obtienen incrementos negativos que se compensan. El segmento situado a la derecha del pico del triángulo aumenta la contracción mientras que el situado a la izquierda la disminuye.

Fijémonos en la figura 3.18. En ella se ha representando la función de contorno triangular en dos instantes de tiempo, t_0 y t_1. En el primer instante, los segmentos 0 y 1 tienen un estado de y_0 y z_0, tal que su suma es igual al estado de contracción $C(t_0)$. En el instante t_1 la función ha avanzado una distancia $v(t_1 - t_0)$ y el nuevo estado de los segmentos es y_1 y z_1:

$$y_1 = y_0 - Av$$

$$z_1 = z_0 + Av$$

La contracción en t_1 es:

$$C(t_1) = y_1 + z_1 = y_0 - Av + z_0 + Av = y_0 + z_0 = C(t_0)$$

que es igual a la contracción en t_0. Por lo que se cumple que $c(t) = cte$.

3.6.3.3. Definiciones

Ya que la función triangular presentada cumple la regla de avance, es la que emplearemos a partir de ahora. Conviene tener en cuenta algunas definiciones que nos serán de utilidad:

- **Punto activo (PA)**: Coordenada x del vértice superior de la función triangular. Este es el punto que define la máxima contracción. Cuando el punto activo pertenece al conjunto {0,1,...,N-1} el segmento correspondiente estará en su máxima contracción

- **Intervalo de contracción inicial**: Intervalo de tiempo desde que el punto máximo de la zona activa es 0 hasta que PA=0. Este intervalo caracteriza la anchura de la fase de contracción inicial.

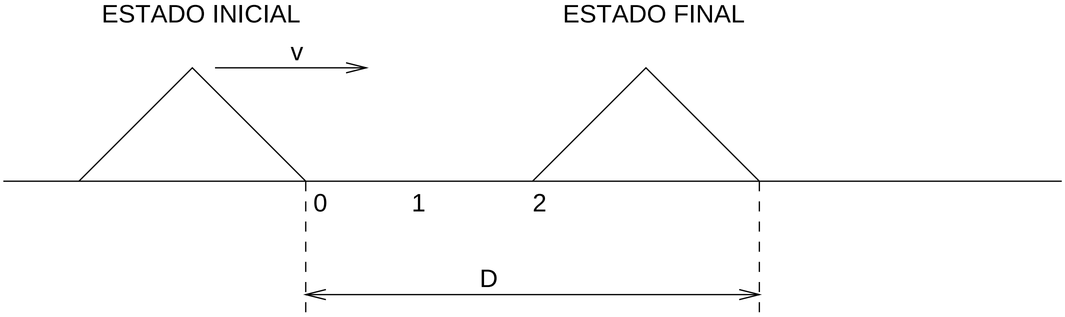

Figura 3.19: Distancia recorrida por la funcion de contorno, desde el estado inicial hasta el final

- **Intervalo de propagación**: Intervalo de tiempo desde que PA=0 hasta que PA=N-1. Caracteriza la duración de la fase de propagación, en la que debe permanecer constante la contracción.
- **Intervalo de expansión final**: Desde que PA=N hasta que el punto mínimo de la zona activa es N. Caracteriza la fase de expansión.

3.7. Estudio del avance

3.7.1. Recapitulación de resultados

El avance lo tenemos caracterizado por las tres reglas. Con los conocimientos que ya tenemos podemos caracterizarlo de una manera más precisa:

1. La evolución se consigue aplicando la **propagación de ondas** a la función de contorno
2. La función de contorno no puede ser cualquiera. Tiene que cumplir la **regla de avance**, enunciada en 3.6.2
3. Para garantizar el avance se debe cumplir al menos la **regla de no retroceso** (ap. 3.5.3)

En este apartado estudiaremos los parámetros que influyen en la velocidad de avance del gusano. Primero trabajaremos con funciones de contorno no periódicas y luego extrapolaremos a las periódicas, que son las que nos interesan.

3.7.2. Función de contorno no periódica

Utilizaremos un gusano de tres segmentos, y una función de contorno triangular, como la definida en el apartado 3.6.3. En la figura 3.19 se muestra la función de contorno en el estado inicial y final y la distancia total D que ha recorrido. Puesto que avanza a una velocidad v, el gusano avanza a un ritmo medio dado por:

$$V_G = \frac{Espacio}{Tiempo} = \frac{A}{t} = \frac{A}{\frac{D}{v}} = v\frac{A}{D}$$

siendo:

- V_G: La velocidad media de avance del gusano
- D: Distancia que recorre la función de contorno, desde que su zona activa entra en el intervalo [0,2] hasta que sale de él.
- A: Valor máximo de la función de contorno.

La distancia D es igual al número de segmentos N más la longitud de la zona activa de la función de contorno, que es 2, por tanto tenemos que la velocidad del gusano es, cuando la función de contorno empleada es la de la figura 3.17:

$$V_G = v\frac{A}{N+2} \tag{3.9}$$

La velocidad del gusano depende por tanto de varios parámetros:

- **Velocidad de propagación v:** Cuando más rápido se propague la función de contorno, más rápido avanzará el gusano. Éste es un parámetro cuyo valor máximo estará determinado por la máxima velocidad a la que los segmentos se puedan contraer-expandir.
- **Valor máximo de la función de contorno**: Cuanto mayor sea el valor máxima de la función de contorno, mayor será la contracción y por tanto mayor será la velocidad. El valor máximo es el de la contracción máxima del segmento, que es A.
- **Número de segmentos**: Para una misma función de contorno, un gusano con menos segmentos avanza más rápidamente
- **Anchura de la zona activa de la función de contorno**: Cuanto más estrecha sea la función de contorno mayor será la velocidad. En el ejemplo la anchura es de 2, que es el valor mínimo.

3.7.3. Función de contorno periódica

En la figura 3.20 se presenta un gusano de 4 segmentos, que se desplaza una distancia A cuando la función de contorno lo ha recorrido totalmente. Si la función de contorno fuese periódica, con una longitud de onda igual a N+2, el efecto conseguido es que el gusano se mueve indefinidamente, puesto que cuando un triángulo abandona el dominio del gusano, inmediatamente entra otro que ocasiona un nuevo ciclo, como se ha dibujado en la figura 3.21. Con una función de contorno de este estilo, la contracción C(t) también es una función periódica (fig 3.22) . La velocidad de avance del gusano se puede expresar ahora en términos de la longitud de onda:

$$V_G = v\frac{A}{\lambda} \tag{3.10}$$

Ahora nos podemos plantear la siguiente pregunta:

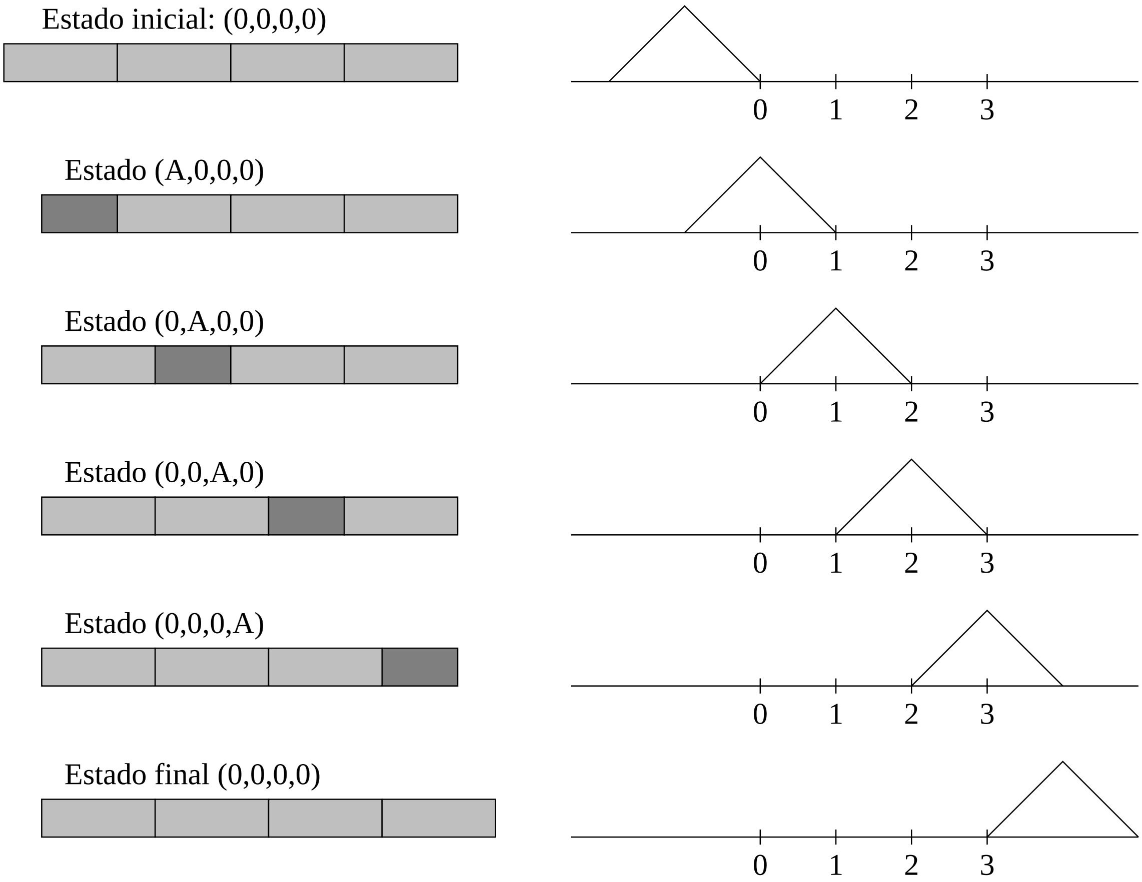

Figura 3.20: Avance de un gusano de cuatro segmentos

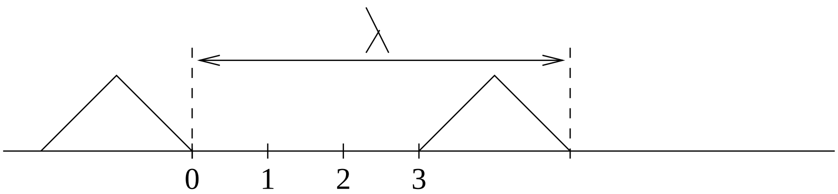

Figura 3.21: Funcion de contorno periodica

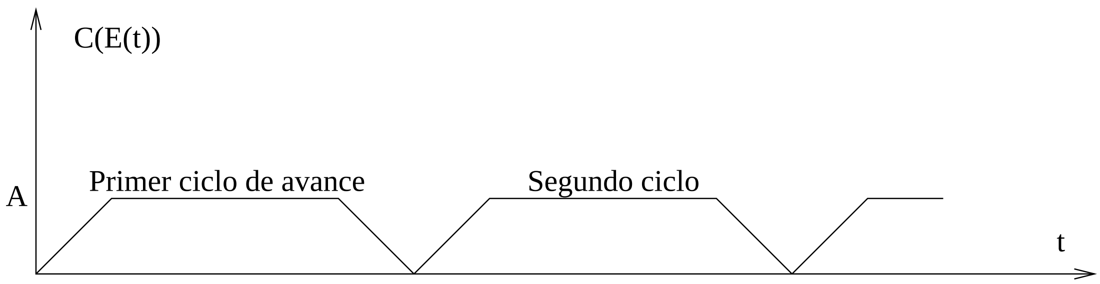

Figura 3.22: Contracción cuando la función de contorno es periódica

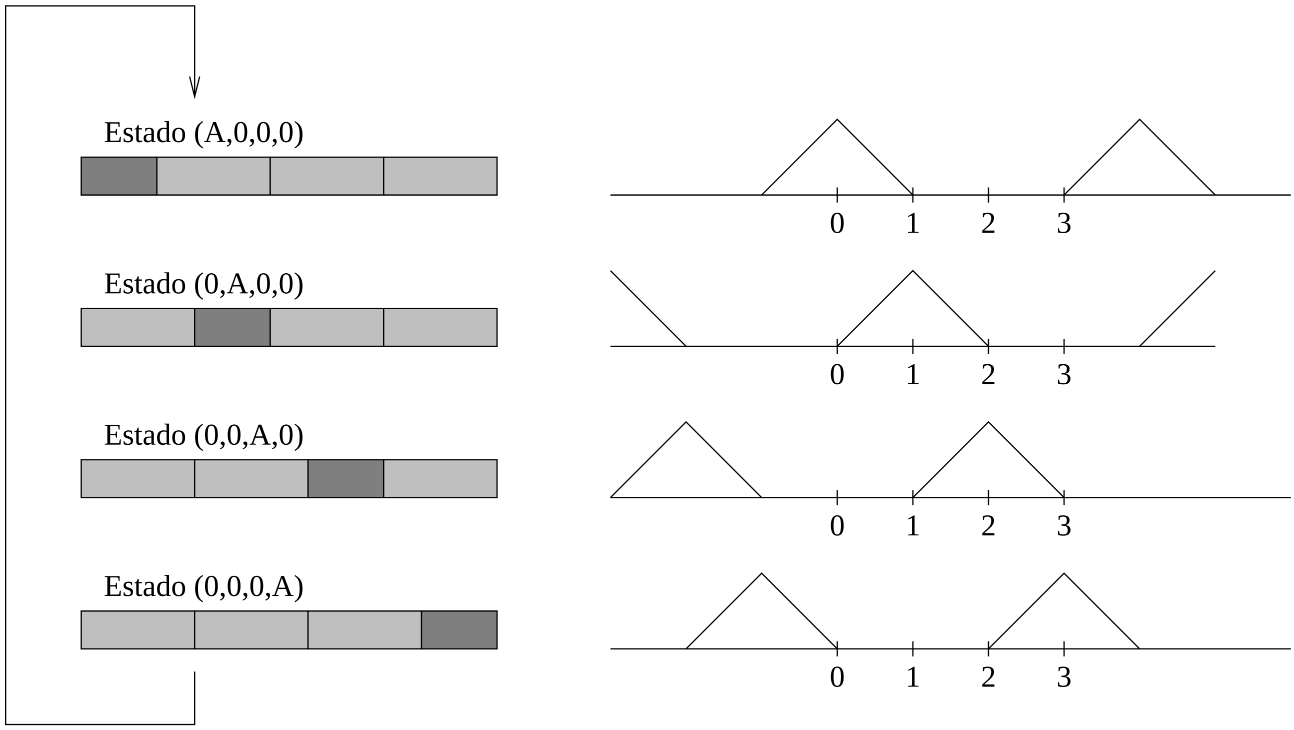

Figura 3.23: Función de contorno periódica con longitud de onda N+1

> *¿Por qué esperar a que salga un triángulo del intervalo [0,..,N-1] para que entre el siguiente?* Es decir, *¿Es posible reducir la longitud de onda de la función de contorno periódica?*.

La respuesta es sí, como se ha representado en la figura 3.23, y la contracción se puede ver en la figura 3.24.

Lo que está ocurriendo es que los ciclos de avance se están solapando. Antes de haber acabado uno, ya está comenzando el siguiente. El resultado es que ahora el gusano avanza un poco más rápido, por haberse reducido la longitud de onda. La contracción total, en este caso, permanece siempre constante. No existen los ciclos de contracción inicial y expansión final.

¿Podemos reducir λ más?. Sí, como se muestra en las figuras 3.25 y 3.26. Sin embargo ahora la función de contracción no permanece constante, sino que hay instantes en los que la contracción vale 2A (en los estados (A,0,0,A)) y momentos en los que vale A (en el resto de estados).

¿Viola esto la proposición de avance? No. La función periódica se puede considerar una superposición de diferentes funciones triangulares desplazadas y cada una de ellas cumple por separado la proposición de avance. Los instantes de tiempo en los que la contracción total no permacene constante se corresponden con los intervalos de tiempo en los que algunos de los triángulos están entrando en el intervalo del gusano ([0...N-1]) o saliendo de él.

La velocidad del gusano ahora es mayor puesto que λ se ha reducido. Además como v es constante, T ha disminuido (ver ec. 2.3). La velocidad se puede definir en función del periodo

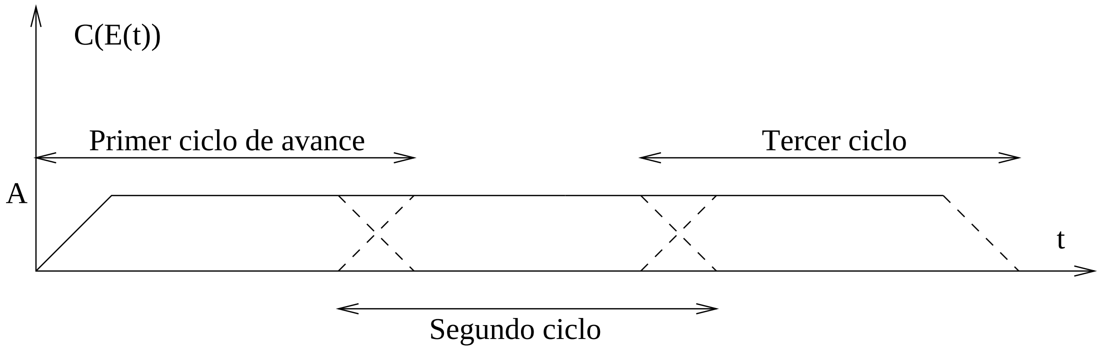

Figura 3.24: Nueva contracción cuando la longitud de onda es N+1

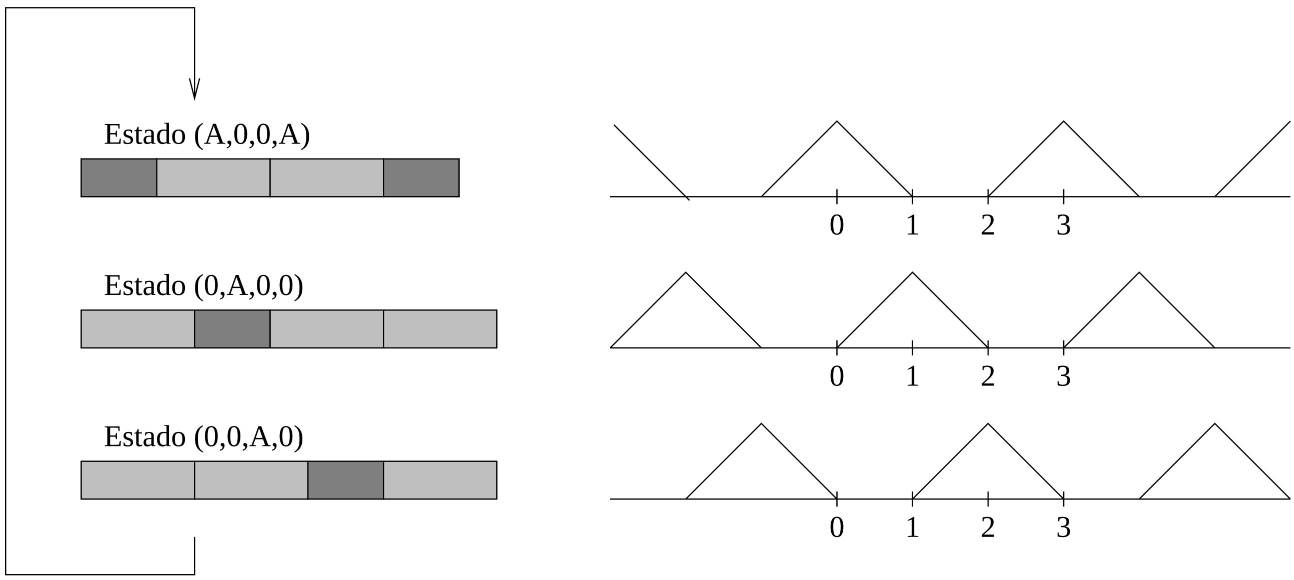

Figura 3.25: Función de contorno periódica con longitud de onda N

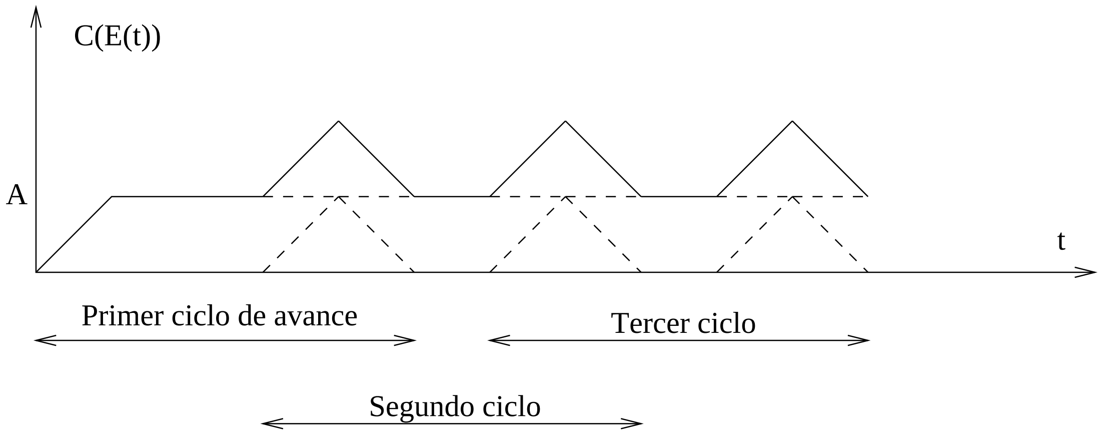

Figura 3.26: Nueva contracción cuando la longitud de onda es N

como:

$$V_G = \frac{A}{T}$$

El valor A es siempre constante y es el valor máximo de la función de contorno. Manteniendo la v cte, cuando reducimos la longitud de onda estamos disminuyendo el periodo y por tanto el avance de la distancia A se hace cada vez con mayor frecuencia.

Todavía se puede reducir la longitud de onda más, para aumentar la velocidad. Es el caso en el que los triángulos están pegados unos a otros y el periodo T es mínimo. La contracción siempre vale 2A. Los estados en los intantes t=0 y $t = \frac{T}{2}$ son (A,0,A,0) y (0,A,0,A).

3.8. Implementación física de gusanos longitudinales

El estudio teórico de estos gusanos es muy interesante y permite presentar conceptos que serán de gran ayuda en los capítulos posteriores. Sin embargo la implementación, es decir, la construcción de uno de ellos, es muy complicado por varios motivos:

1. El gusano se "arrastra" por lo que hay mucho rozamiento con la superficie. Para eliminar este rozamiento en las partes contráctiles habría que elevarlas del suelo, lo cual complica mucho la mecánica.

2. Lograr que se cumpla la regla de no retroceso es complejo, porque hay que sincronizar muy bien todos los mecanismos. Un punto debe estar fijado sólo en unos instantes de tiempo de determinados.

3. El gusano no podría moverse por cualquier tipo de superficie, porque no en todas ellas podría garantizar la condición de no retroceso

4. El gusano no puede atravesar obstáculos ni moverse por superficies rugosas

5. Es complicado mecánicamente implementar los segmentos contráctiles-retráctiles.

3.9. Resumen

En este capítulo se ha presentado un modelo de gusano longitudinal, se ha parametrizado y se ha definido su estado interno. Aunque es difícil de implementar en la práctica, el modelo de control es muy sencillo, basado en la propagación de las ondas de contorno, que van definiendo su estado interno. Esto responde a la pregunta 1 formulada en la introducción. La propagación de ondas se emplea para obtener las evoluciones internas, o estados de contracción del gusano.

Los parámetros más importantes del gusano son:

- La **función de contorno F(x)**, que define los estados presentes, pasados y futuros.

- El **vector de estado E(t)**, que define el estado en un instante y se calcula a partir de la función de contorno.

- La **contracción total C(t)**, que indica cuánto ha variado su longitud respecto de la longitud natural.

El movimiento de avance se ha caracterizado, definiendo **las tres reglas de avance** que se tienen que cumplir:

1. La evolución de los estados internos se consigue **propagando la función de contorno**.
2. Esta función tiene que cumplir la **regla de avance** para conseguir que el gusano avance.
3. La condición externa que hay que garantizar es la **regla de no retroceso**.

Estas reglas responden a la pregunta 2 de la introducción, indicándonos cuáles son los mecanismos para que se produzca movimiento.

Se ha presentado una función de contorno, triangular, que cumple la regla de avance y que modela perfectamente la evolución del estado interno.

Con toda esta información se ha estudiado la velocidad de avance del gusano y los parámetros implicados, tanto para funciones de contorno periódicas como no periódicas.

Capítulo 4

Mecanismos de movimiento II: Gusano transversal

4.1. Introducción

En este capítulo se estudian los mecanismos de movimiento para los gusanos transversales. Definimos **gusano transversal** como aquel que se mueve mediante ondas transversales que recorren su cuerpo desde la cola hasta la cabeza. Es el movimiento típico de muchos tipos de gusanos, como por ejemplo los de seda.

Se va a crear un modelo de gusano, con unos parámetros propios y se va caracterizar su estado interno. Esto nos permitirá comprender los mecanismos asociados a los cambios de estado y cómo se efectúan, para poder luego implementarlos. También estudiaremos las funciones de contorno de manera que el diseñador pueda seleccionar la más apropiada para su tipo de gusano.

Los gusanos transversales y longitudinales están relacionados entre sí. Esto también se estudiará en este capítulo de manera que los resultados del capítulo 3 tengan validez en los gusanos transversales.

Las ideas centrales que se presentarán son fundamentales para la implementación posterior de un gusano transversal.

4.2. Modelo de gusano transversal

4.2.1. Parámetros de modelado

Los gusanos transversales se modelan mediante dos elementos: las *articulaciones* y los *segmentos*. Supondremos que están constituidos por N articulaciones, denotadas mediante a_1,a_2,....,a_N y por $N-1$ segmentos: s_1,s_2,...,s_{N-1}.

Los *segmentos* son rígidos, de longitud L. Todos ellos exactamente iguales, con la misma masa y las mismas propiedades mecánicas. El segmento de cola es el s_1 y el de cabeza el s_{N-1}.

Las *articulaciones* son los elementos que unen dos segmentos entre sí. En total hay N, de las cuales dos son *articulaciones ficticias*, a_1 y a_N puesto que no unen dos segmentos y en la

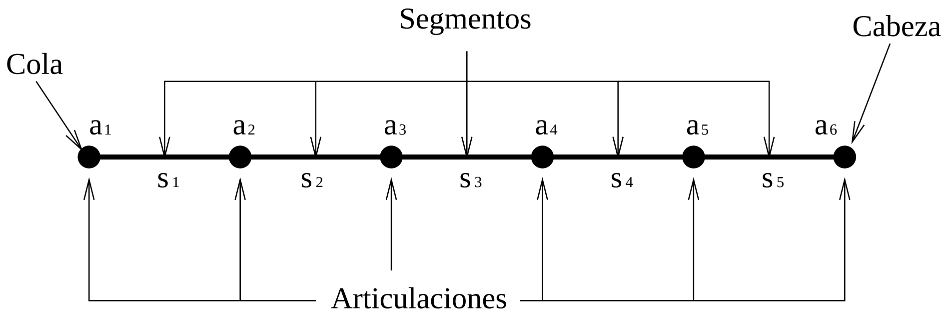

Figura 4.1: Modelo de gusano transversal con 5 segmentos y 6 articulaciones

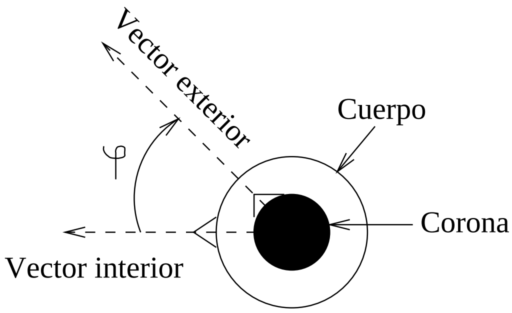

Figura 4.2: Elementos de una articulacion

implementación no se corresponden con ninguna articulación física. Las restantes $N-2$ son *articulaciones reales*, $a_2..a_{N-1}$. La articulación a_1 se denomina *articulación de cola*, o simplemente *cola* y la a_N, *articulación de cabeza* o *cabeza*. Supondremos que son exactamente iguales, con la misma masa e iguales propiedades. Los segmentos se encuentran perfectamente enganchados unos a otros y el estado en el que se encuentra cada articulación sólo depende del estado interno del gusano y no viene impuesto por fuerzas externas, es decir, que si una articulción se encuentra en un ángulo determinado, ninguna fuerza externa la podrá hacer cambiar de estado.

En la figura 4.1 se muestra un gusano transversal, con 6 articulaciones y 5 cinco segmentos. Se encuentra apoyado sobre una superficie horizontal.

4.2.1.1. Articulaciones

Las articulaciones las representaremos mediante puntos gruesos que unen los segmentos. Sin embargo, estos puntos negros están constituidos por diferentes elementos, que se muestran en la figura 4.2. Las diferentes partes son:

- **Cuerpo** y **corona**. La articulación está constituida por dos partes que pueden rotar una con respecto a la otra. La parte más grande, donde se encuentran los mecanismos se denomina cuerpo y la parte más pequeña, conectada al eje de salida es la corona.

- **Eje de salida**: Es el eje que une ambas partes y que permite que la una gire con respecto a la otra. Este eje no se ha dibujado en la figura 4.2.

Además de estas partes físicas, hay una serie de definiciones a tener en cuenta:

- **Vector interior**: Es un vector que caracteriza el cuerpo. Indica la dirección de orientación del cuerpo.
- **Vector exterior**: Es el vector que caracteriza la corona. Indica la dirección de orientación de la corona.
- **Angulo** φ: Es el *ángulo de estado de la articulación*. Indica el ángulo que forma el cuerpo con respecto a la corona. Este ángulo es relativo y no depende de cómo esté orientada la articulación entera.

El rango de giro de la articulación es de 180^0 con $\varphi \in [-90, 90]$. Obsérverse que el convenio de signos para φ es el contrario del habitual: positivo en sentido horario y negativo en el antihorario. Se ha tomado este convenio para hacer más intuitivos los cálculos en capítulos posteriores. Cuando $\varphi = 0$ el vector interior y el exterior apuntan en la misma dirección. Este es el **estado de reposo** de la articulación.

Para determinar la orientación de una articulación tomaremos por convenio el vector interior. Hay que resaltar que φ está determinando el estado interno de la articulación y que por ello es independiente de la orientación en la que se encuentre. En la figura 4.3 se pueden ver articulaciones con el mismo valor de φ pero en la que el vector interior está apuntando en diferentes direcciones, es decir, la articulación está orientada en otra dirección, manteniendo el mismo estado interno.

El emplear los vectores interior y exterior nos permite representar la articulación sin tener que dibujarla, como se muestra en la figura 4.4.

El ángulo que forman dos segmentos conectados por la articulación NO es φ, sino que depende de dónde estén enganchados. Un segmento estará enganchado a la corona coincidiendo su dirección con el vector exterior. Sin embargo el otro segmento se puede colocar en la misma dirección que el vector interior o justamente en la opuesta, como es el caso del gusano que se ha implementado. El segmento asociado a la corona se llama **segmento exterior** y el asociado al cuerpo **segmento interior**, que no tiene por qué coincidir con el vector interior. El ángulo que forma el segmento interior con el exterior se denomina **ángulo de estado de los segmentos** y se representa por θ (Figura 4.5). Siempre se verifica la siguiente relación:

$$\theta = 180 - \varphi \tag{4.1}$$

que permite calcular el ángulo que forman los segmentos en función del estado interno de la articulación. El rango de variación de θ es el siguiente:

$$\theta \in \begin{cases} [-90, -180] & \varphi < 0 \\ [90, 180] & \varphi > 0 \end{cases}$$

En la figura 4.6 se han representado tres posiciones $\theta = 90$, $\theta = 180$ y $\theta = -90$, estando el vector interior orientado hacia la parte negativa del eje de abcisas.

La definición de estos ángulos y de los signos se ha establecido así para facilitar los cálculos y los dibujos, pero es un simple convenio que se respetará a lo largo del resto de capítulos.

A modo de resumen los **parámetros de la articulación** son:

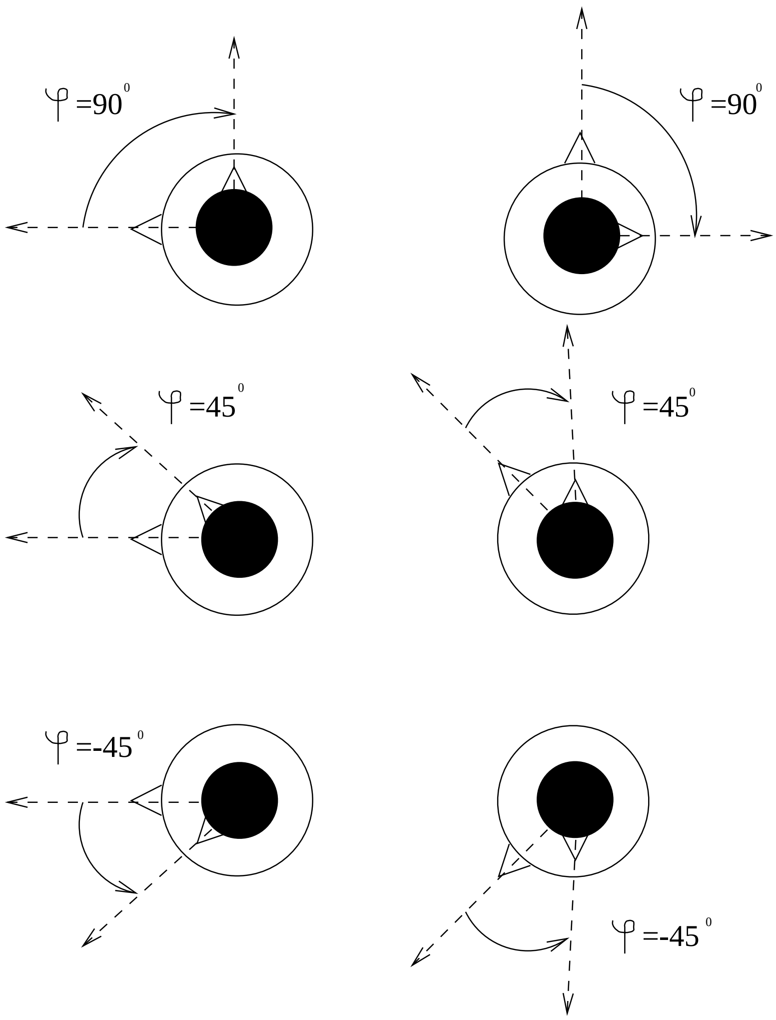

Figura 4.3: Articulaciones con distintos estados y diferentes orientaciones

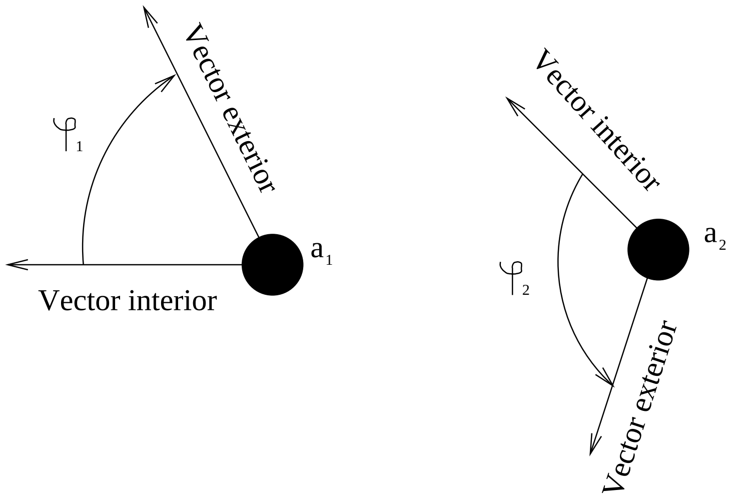

Figura 4.4: Dos articulaciones representadas mediante su vector interior y exterior.

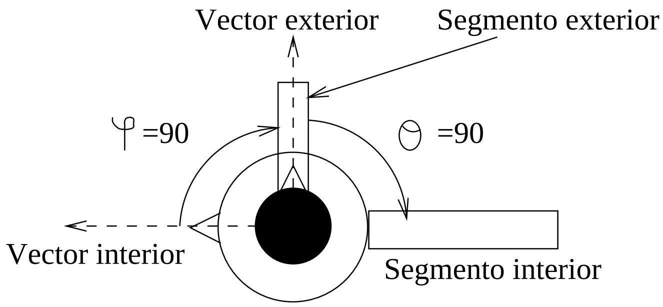

Figura 4.5: Segmento exterior y segmento interior

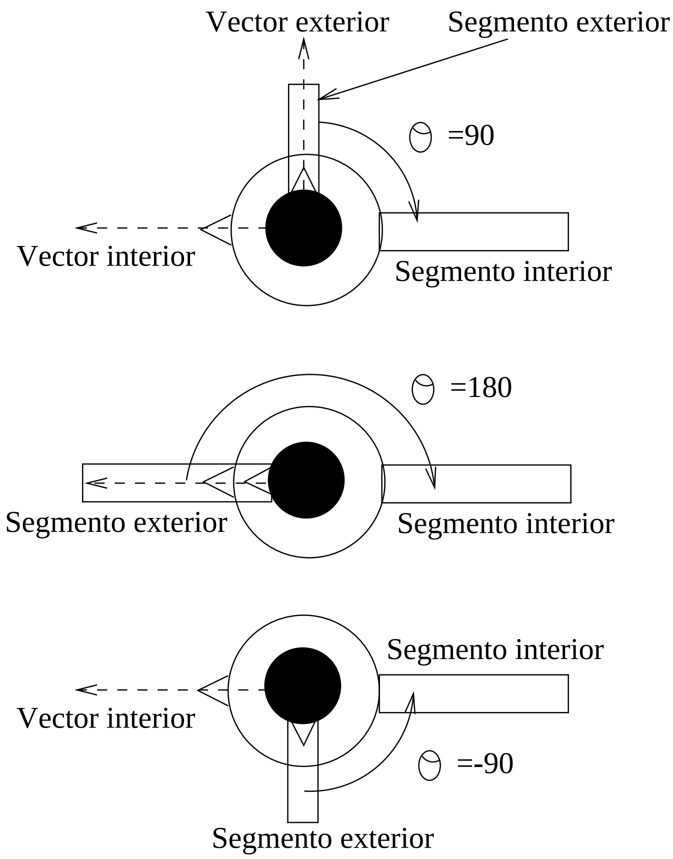

Figura 4.6: Diferentes valores de θ en una articulación

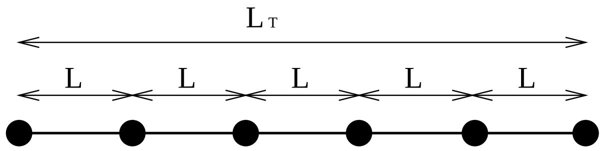

Figura 4.7: Parámetros estáticos del gusano transversal.

- **Estado de la articulación (φ)**. Ángulo entre vector interior y exterior. $\varphi \in [-90, 90]$
- **Ángulo de estado de los segmentos (θ)**. Ángulo que forma el segmento exterior con el interior.

Ambos parámetros son dinámicos, dependen del instante de tiempo t considerado y se encuentran relacionados por la ecuación 4.1.

4.2.1.2. Parámetros del gusano

1. **Parámetros estáticos**.

   a) N**: Número de articulaciones**.

   b) L_T**: Longitud total del gusano**. Supondremos que las articulaciones son puntuales y que el tamaño es sólo debido a los segmentos. Como todos tienen la misma longitud L, la longitud total se puede calcular como:

   $$L_T = (N-1)L \tag{4.2}$$

   En la figura 4.7 se ha dibujado un gusano de seis articulaciones y cinco segmentos. Se puede ver gráficamente la longitud total en relación con la longitud de los segmentos.

2. **Parámetros dinámicos**.

   a) L_P: **Longitud proyección**. Es la longitud que tiene la proyección del gusano sobre el eje de abcisas. Si denotamos por $x(a_i)$ la coordenada x de la articulación i, este parámetro se puede definir como:

   $$L_P = x(a_N) - x(a_1) \tag{4.3}$$

   b) $C(t)$: **Contracción**. Es la diferencia entre la longitud total del gusano, L_T, y la del gusano proyección, L_P. Este parámetro es muy importante y nos da una idea de que se ha acortado el gusano por el hecho de adoptar una posición diferente de la de reposo.

   $$C(t) = L_T - L_P \tag{4.4}$$

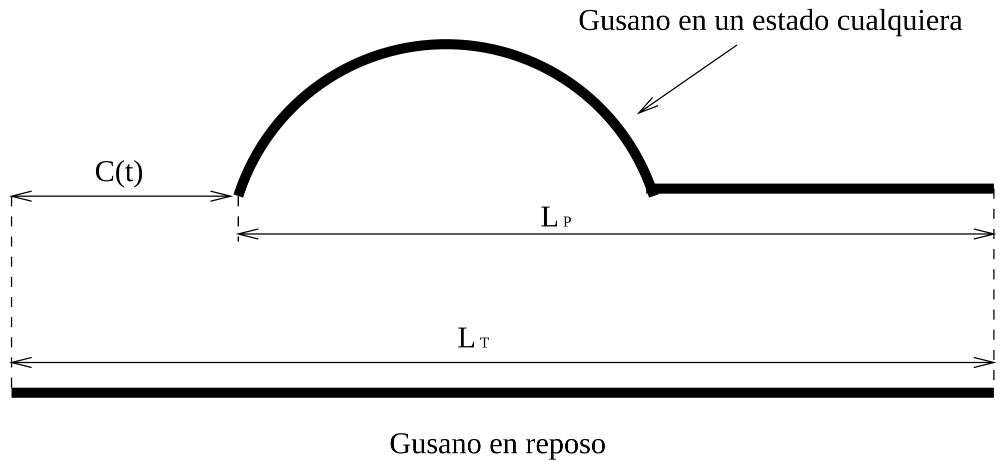

Figura 4.8: Parámetros dinámicos de un gusano transversal

El valor mínimo es 0, que se indica que se encuentra en posición de reposo caracterizada porque está totalmente extendido sobre la superficie de apoyo y $L_T = L_P$. El valor máximo teórico es L_T, que ocurre cuando el gusano está en posición vertical y su proyección es un punto.

En la figura 4.8 se han dibujado los parámetros dinámicos y su relación con la longitud total. Se ha supuesto que se trata de un gusano continuo, que es lo mismo que decir que la longitud de los segmentos tiende a cero, $L \to 0$ y que hay infinitas articulaciones, $N \to 0$.

4.2.2. Caracterización

Las articulaciones las caracterizaremos por el ángulo de estado $\varphi_i(t)$, que determina el ángulo entre el vector interior y exterior de la articulación i. Para caracterizar el estado en el que se encuentra el gusano utilizaremos un **vector de estado** E, de N componentes, una para cada articulación. La componente i de este vector es el ángulo de estado de la articulación i, en un instante de tiempo t:

$$E(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_N(t))$$

Las articulaciones a_1 y a_N son ficticias por lo que su valor carece de valor para la implementación, sin embargo son muy útiles para los cálculos. La articulación de cola está determinando la orientación del gusano completo y se puede considerar que es una articulación que une el segmento de cola con el eje x. La articulación de la cabeza indica la orientación de la cabeza. No es de utilidad para el modelado, pero se puede emplear para orientar algún tipo de sensor que se encuentre en la cabeza. Consideraremos que su estado es siempre 0.

En la figura 4.9 se ha dibujado el gusano en tres estados diferentes. En la parte superior el gusano está en estado de reposo, con un vector E=(0,0,0,0,0,0). En los dibujos inferiores se encuentra en dos estados diferentes: $(0, 0, 0, 30, -60, 0)$ y $(45, -45, -45, 45, 45, 0)$. En ellos se ha dibujado el vector interior para ver claramente el ángulo φ. El vector exterior coincide con el segmento exterior por lo que no se ha dibujado.

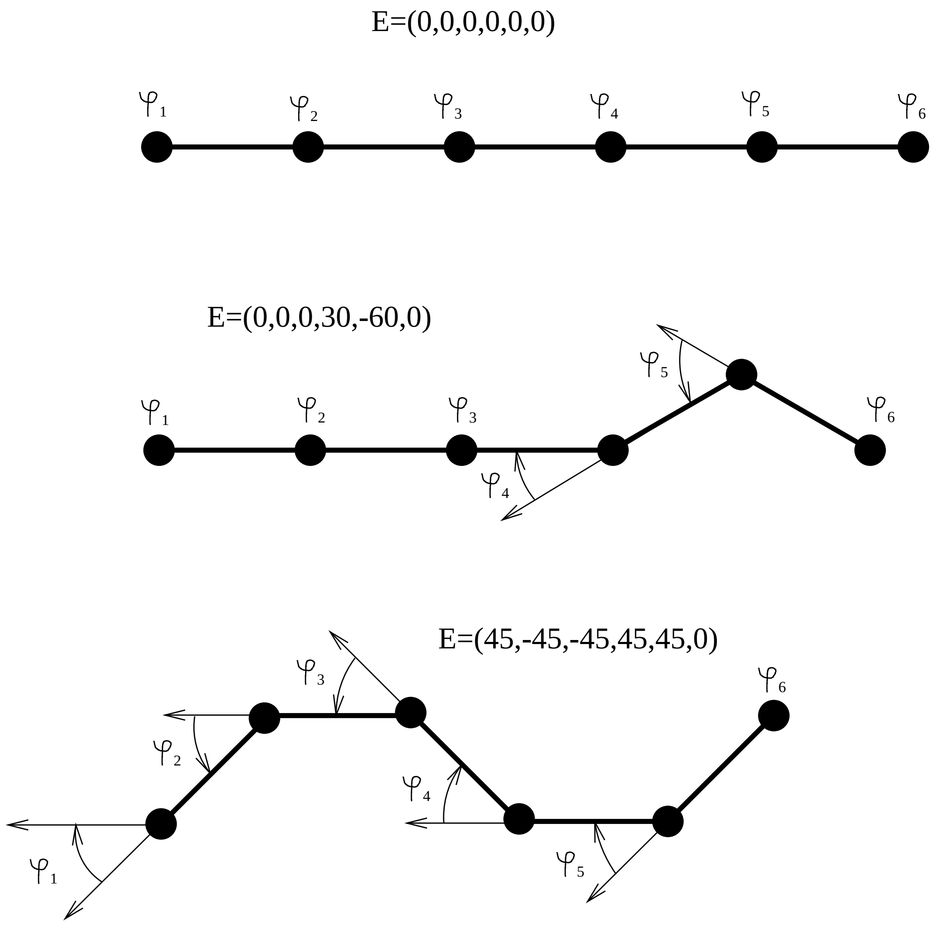

Figura 4.9: Gusanos en diferentes estados

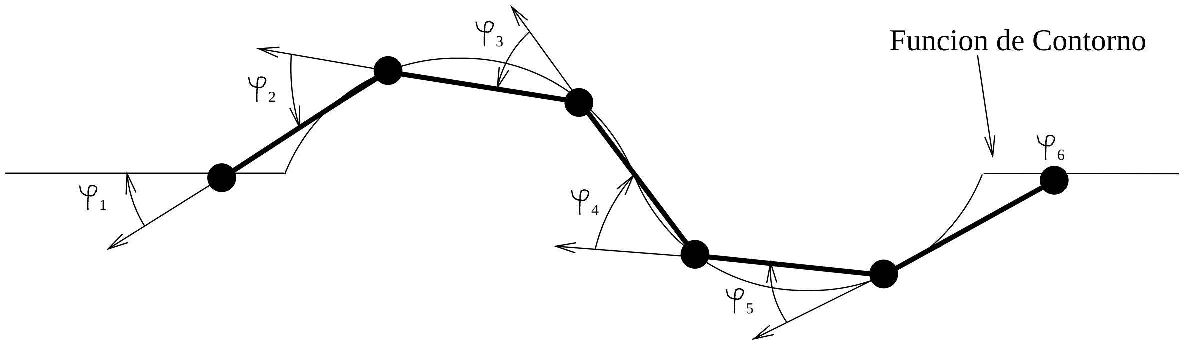

Figura 4.10: Una función de contorno sinusoidal y el estado del gusano que determina

4.2.3. Función de contorno

En el caso de los gusanos transversales también existe una función de contorno que determina los estados pasado, presente y futuro. Y es por ello la herramienta que emplearemos para lograr que el gusano evolucione, pasando de un estado a otro. Se trata de una función $F : \Re \rightarrow \Re$ que indica la relación entre las coordenadas (x, y) de las articulaciones. De igual forma que la función de contorno determina los estados de contracción de los gusanos longitudinales, en los transversales determina los ángulos de las articulaciones, pero no de una manera directa.

El concepto de función de contorno se ve muy claro en la figura 4.10. Si denotamos por $x(a_i)$ la abscisa de la articulación i, y por $y(a_i)$ su ordenada, éstas deben cumplir la función de contorno:

$$y(a_i) = F\left(x(a_i)\right) \tag{4.5}$$

Por tener que cumplirse esta relación, quedan determinados los ángulos de estado de las articulaciones. El cómo obtenerlos es un problema que se tratará en el capítulo 5. El concepto de **zona activa de la función de contorno** (**ZA**) se presenta en la figura 4.11 y nos da una idea de la anchura de esta función. En el ejemplo, $ZA = [x(A), x(B)]$. Si una articulación está dentro de la zona activa entonces se verificará que $\varphi \neq 0$. Sin embargo lo contrario no es cierto. Si la articulación se encuentra fuera de la zona activa, no tiene por qué cumplirse que $\varphi = 0$. Esto nos permite definir la **zona activa del gusano(ZAG)**, que es un intervalo sobre el eje de abscisas en el que se cumple:

$$x(a_i) \in ZAG \Leftrightarrow \varphi_i \neq 0$$

En la figura 4.12 se muestra un gusano de 8 articulaciones y una función de contorno que determina un cierto estado. La zona activa es el intervalo $ZA = [x(A), x(B)]$ y la zona activa del gusano es $ZAG = [x(a_2), x(a_7)]$.

Siempre se verifica la siguiente relación:

$$ZA \subseteq ZAG$$

En el caso de un gusano continuo, constituido por infinitas articulaciones y con longitud de los segmentos $L \rightarrow 0$, se cumple la relación de igualdad: $ZA = ZAG$, ya que este caso el gusano se “ajusta” perfectamente a la función de contorno. El conjunto $ZAG - ZA$ nos está dando una

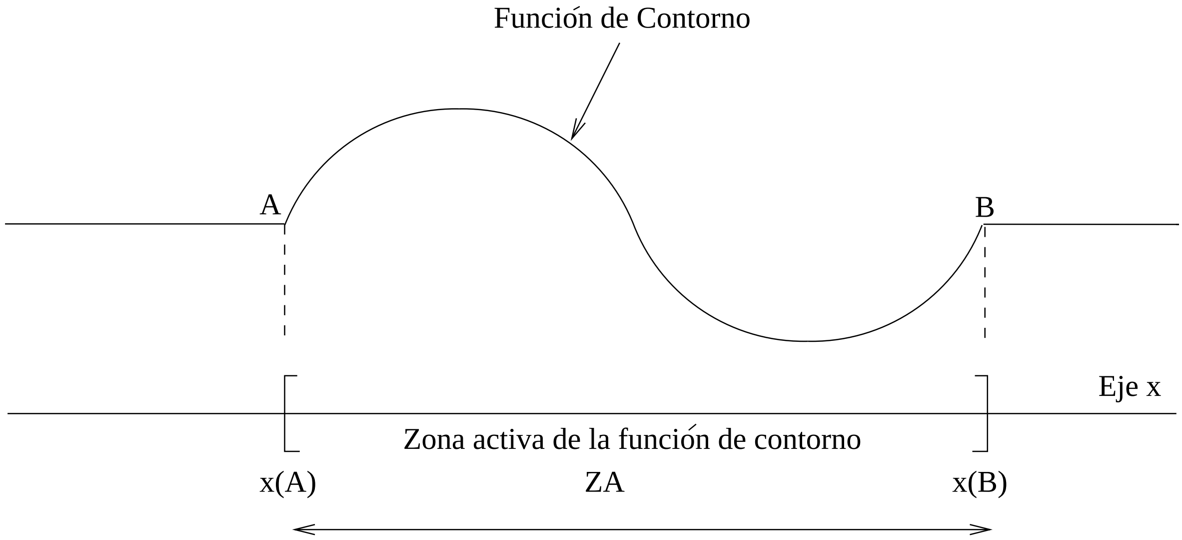

Figura 4.11: Concepto de zona activa de la función de contorno

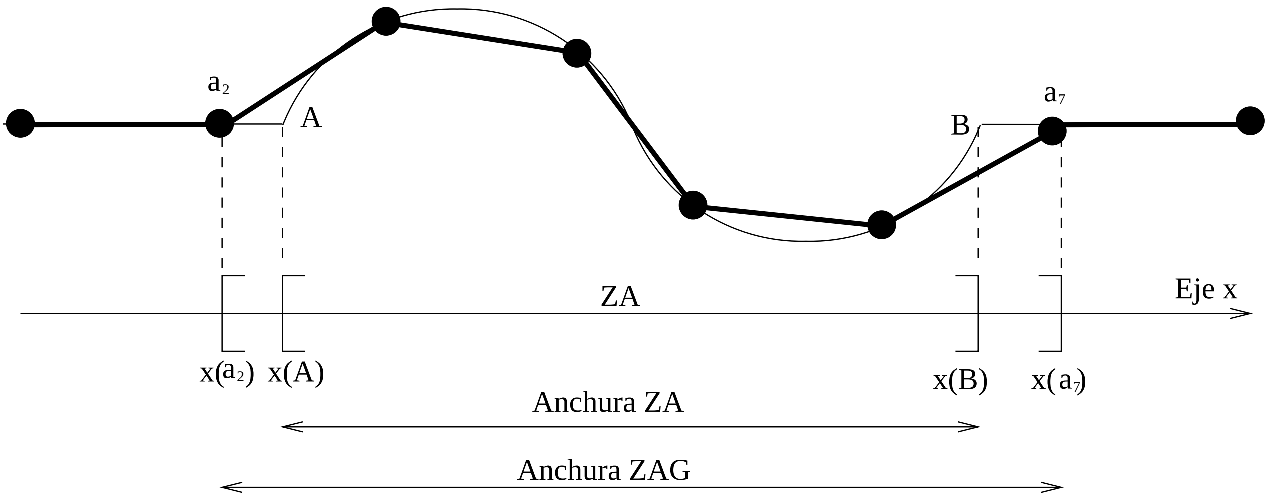

Figura 4.12: Diferencia entre ZA y ZAG

idea de cuánto de bien se aproxima el gusano a la función de contorno. Cuando menor sea L, más cortos serán los subintervalos $[x(a_i), x(A)]$ y $[x(B), x(a_j)]$ del conjunto $ZAG - ZA$ y mejor será la aproximación.

Los puntos extremos de la ZA los llamaremos A y B y sus abcisas las denotaremos por x(A) y x(B). Para las articulaciones extremas de la ZAG, se empleará a_I para la articulación de la izquierda y a_D para la de la derecha.

4.3. Relación con el modelo de gusano longitudinal

4.3.1. Modelo continuo

Los modelos de gusano longitudinal y transversal están muy relacionados. De hecho, *todo gusano transversal genera uno longitudinal*. En este apartado se analizarán las relaciones suponiendo que estamos trabajando con gusanos continuos. Para diferenciar los parámetros de ambos gusanos se utilizará el subíndice T para indicar transversal y L para longitudinal. Los gusanos continuos verifican:

- **Gusano transversal continuo**
  - $N \to \infty$. Infinitas articulaciones.
  - $L \to 0$. Longitud de los segmentos tiende a cero.
- **Gusano longitudinal continuo**:
  - $N \to \infty$. Infinitos segmentos.
  - $L_0 \to 0$. La longitud natural de los segmentos tiende a cero

Las relaciones entre los parámetros de ambos gusanos son las siguientes:

1. $L_{T_L}(t) = L_P(t)$. La longitud total del gusano longitudinal es igual a la longitud proyección del transversal.
2. $C_L(t) = C_T(t)$. La contracción del gusano longitudinal es la misma que la del transversal. Por ello a partir de ahora se denotará por $C(t)$.
3. $ZA_L = ZA_T$. La zona activa del gusano longitudinal es igual a la zona activa del transversal.[1]

En la figura 4.13 se ha dibujado un gusano transversal y su gusano generado. Dado un gusano transversal podemos calcular el longitudinal generado obteniendo todos sus parámetros. Para pasar del longitudinal al transversal tenemos que conocer la función de contorno.

[1]Como estamos trabajando con un modelo continuo de gusano transversal se verifica que $ZA_T = ZAG_T$.

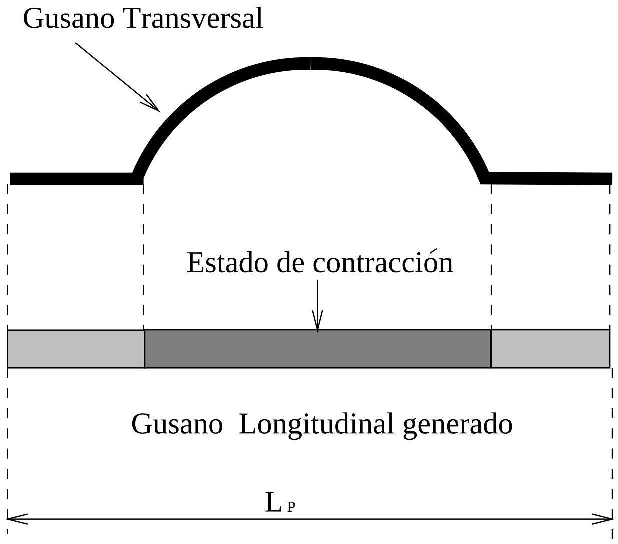

Figura 4.13: Gusano transversal y su gusano longitudinal asociado

4.3.2. Modelo discreto

Si utilizamos modelos discretos, también encontramos relaciones entre los gusanos. Supondremos que el gusano transversal tiene N articulaciones y que el longitudinal tiene $N-1$ segmentos, numerados desde el segmento 1 hasta el N. Al hablar de segmentos entenderemos los segmentos contráctiles del gusano longitudinal.

El estado de los segmentos el gusano longitudinal está determinado por la contracción $c_i(t)$, mientras que en los transversales se habla del estado de las articulaciones $\varphi_i(t)$. La asociación entre ambos gusanos se realiza teniendo en cuenta:

1. El estado de la articulación i, determina el estado del segmento i. $c_i(t) \leftrightarrow \varphi_i(t)$

2. La articulación a_N de cabeza no determina el estado de ningún segmento. Se elimina.

La **relación entre los estados de las articulaciones y los segmentos** es:

$$c_i(t) = Lcos(\varphi_i(t)) \tag{4.6}$$

En la figura 4.14 se muestra gráficamente la relación entre ambos gusanos discretos y se puede ver que se cumple la ecuación 4.6.

Sea un gusano transversal caracterizado por el vector de estado:

$$E_T(t) = (\varphi_1(t), ..., \varphi_{N-1}(t), \varphi_N(t))$$

con N componentes. El vector de estado del gusano longitudinal generado es:

$$E_L(t) = (c_1(t), ..., c_{N-1}(t)) = (Lcos(\varphi_i(t)), ..., Lcos(\varphi_{N-1}(t)))$$

que tiene N-1 componentes.

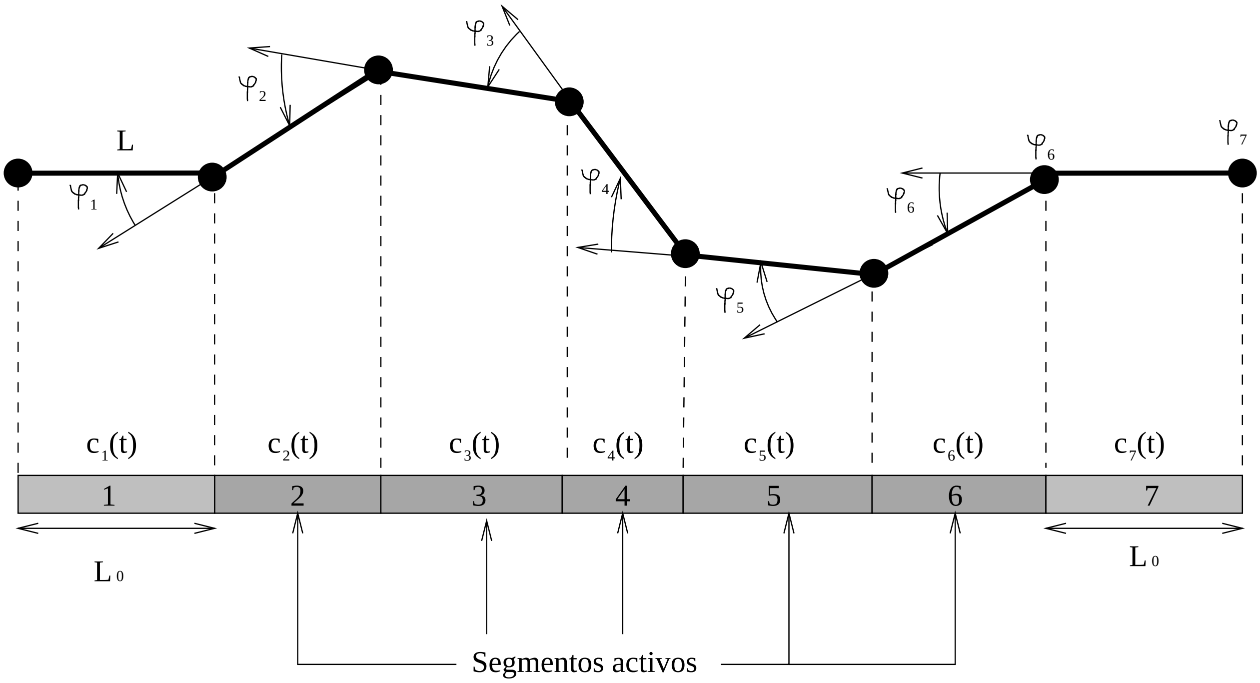

Figura 4.14: Relación entre un gusanos longitudinal y uno transversal.

4.4. Gusano transversal y reglas de avance

Como se ha visto en el apartado 4.3, existe una relación entre los gusanos transversales y longitudinales. Esto nos permite aplicar al gusano transversal todas las ideas desarrolladas para el longitudinal en el capítulo 3. En ese capítulo se definió lo que entiende por avance y se caracterizó el movimiento de avance mediante las *tres reglas de avance*. Estas mismas reglas son de aplicación a los gusanos transversales, pero enunciándolas de diferente manera para emplear los parámetros de estos gusanos.

En el caso de los gusanos transversales continuos todo es muy sencillo porque las articulaciones y los propios puntos de la función de contorno son los mismos. Los problemas aparecen cuando se trabaja con modelos discretos.

4.4.1. Modelo de evolución: propagación de ondas

Tenemos una función de contorno que define el estado del gusano transversal para un cierto instante t. Si esta función se propaga con una velocidad v, se generan los diferentes vectores de estado en función del tiempo. Con ello conseguimos una evolución y se cumple la regla 1.

Si $F(x)$ es la función de contorno, la onda de propagación se obtiene como:

$$P(x,t) = F(x - vt)$$

En la figura 4.15 se ha dibujado el gusano en tres estados diferentes, obtenidos a partir del desplazamiento de la función de contorno.

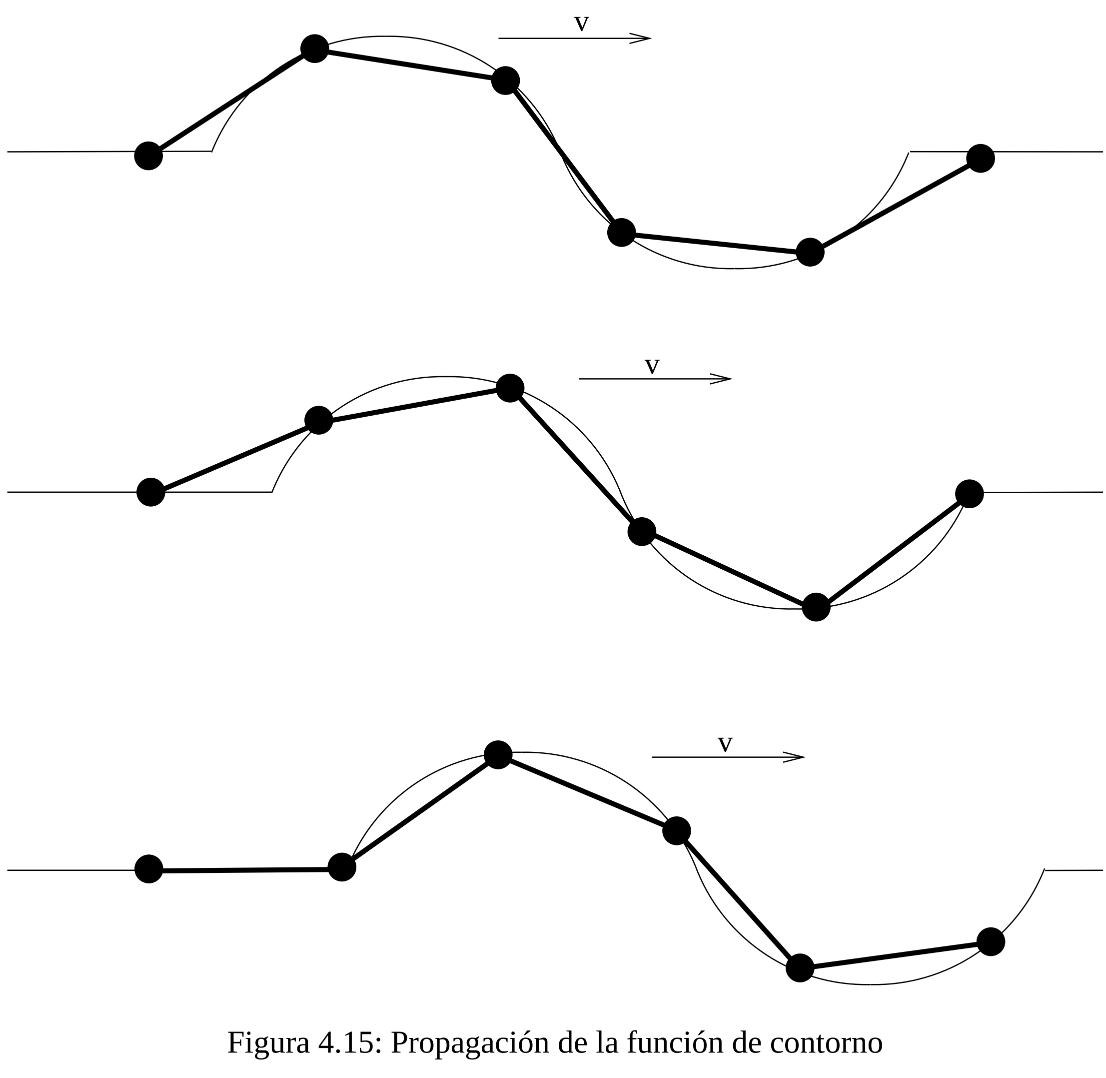

Figura 4.15: Propagación de la función de contorno

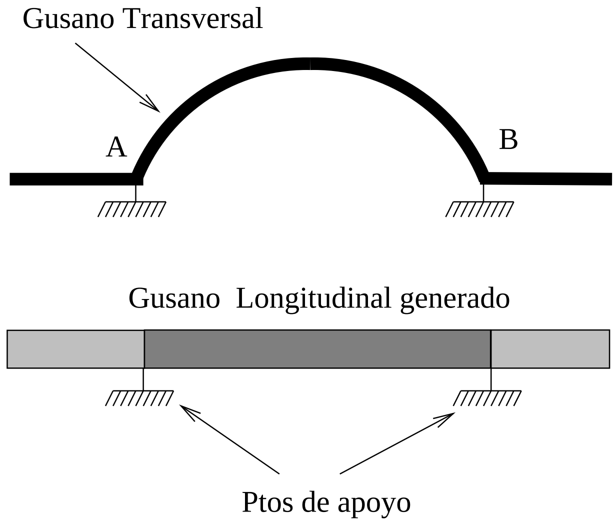

Figura 4.16: Gusano transversal y longitudinal generado junto con los puntos de apoyo candidatos.

4.4.2. Condiciones externas

Para que exista avance, el gusano longitudinal generado debe cumplir la **regla de no retroceso** (apartado 3.5.3). Esta regla, aplicada a un modelo de gusano transversal continuo dice:

> *Al menos uno de los dos puntos extremos de la ZA, punto A ó punto B, debe ser un punto de apoyo, es decir, debe cumplirse que x(A)=cte o x(B)=cte.*

Esta condición establece que en todo instante de tiempo al menos hay un punto del gusano que nunca retrocede, por lo que el avance es posible. En la figura 4.16 se muestra un gusano transversal y su longitudinal generado junto con los puntos de apoyo candidatos. Recuérdese que ésta es la condición mínima. Lo normal es que los puntos que permanezcan fijados a la superficie deban ser todos los que no se encuentran en la ZA.

Para el caso de un gusano transversal discreto, como el de la figura 4.17, la condición de no retroceso se aplica a alguna de las dos articulaciones extremo de la ZAG, bien a_I o bien a_D. La relación de estas articulaciones con los segmentos activos es:

- $I(sam) = a_{sam} = a_I$. El punto izquierdo del segmento activo menor coincide con la articulación del extremo izquierdo de la ZAG.
- $D(SAM) = a_{SAM+1} = a_D$. El punto derecho del segmento activo mayor coincide con la articulación del extremo derecho de la ZAG.

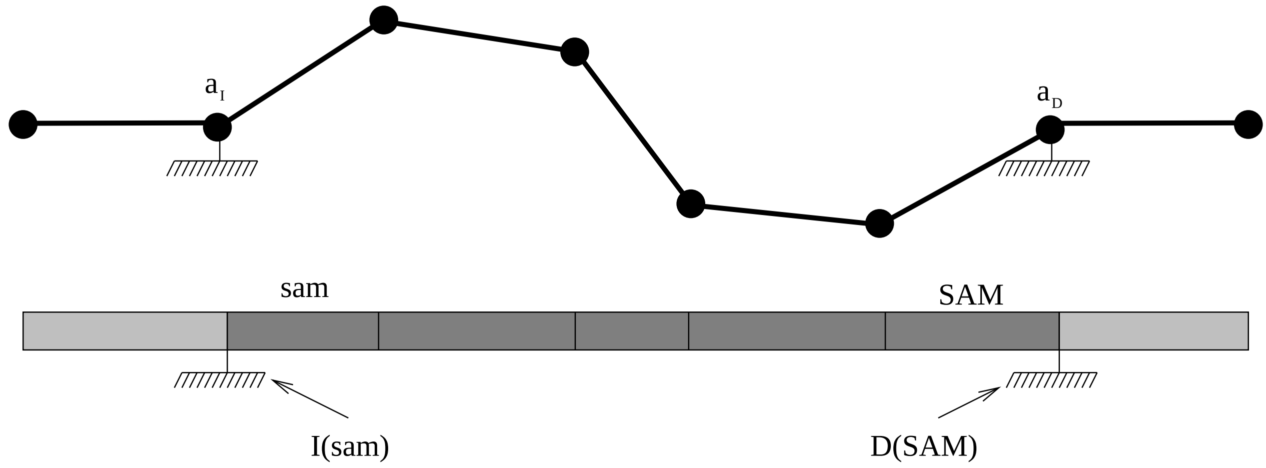

Figura 4.17: Gusano transversal discreto y puntos de apoyo

4.4.3. Condiciones internas

4.4.3.1. Modelo continuo

En la evolución interna existen las mismas tres fases que con los gusanos longitudinales: *contracción inicial*, *propagación* y *expansión final*. En la figura 4.18 se muestran estas fases aplicadas a la evolución de un gusano transversal continuo. También se ha dibujado el gusano longitudinal generado.

La evolución de la contracción $C(t)$ presenta tres tramos bien diferenciados. Un primer tramo en el que va aumentando. Ahora no tiene por qué hacerlo linealmente, puesto que depende de la forma de la función de contorno. Un segundo tramo en el que permanece constante y uno último en el que decrece. La regla de avance es la misma. Ahora la pregunta es: *¿Qué funciones de contorno cumplen esta regla?*

Por definición la contracción se calcula como:

$$C(t) = L_T - L_P$$

siendo L_T la longitud total del gusano, que es constante y L_P la longitud proyección, que sí puede variar con el tiempo. Las partes del gusano fuera de la zona activa están apoyadas sobre el eje de abscisas y no sufren contracción. Otra manera de calcular la contracción es:

$$C(t) = P(F) - (x(B) - x(A))$$

donde $P(F)$ es el perímetro de la función de contorno y $x(B) - x(A)$ es la longitud de la zona activa. Por tanto para que $C(t)$ permanezca constante hay que garantizar que:

1. El perímetro de la función de contorno no puede variar mientras se propaga

2. La longitud de la zona activa debe permanecer constante durante la propagación

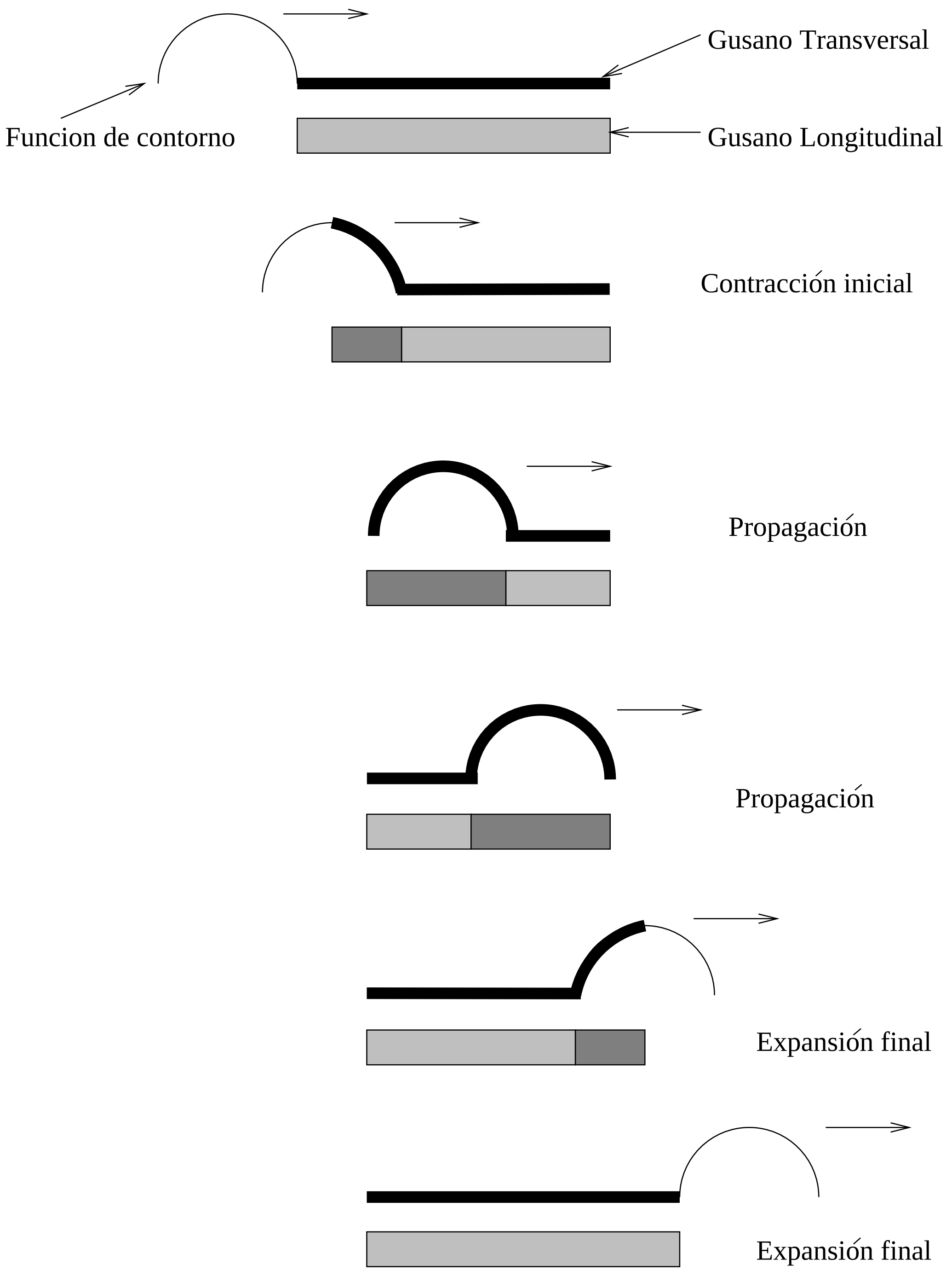

Figura 4.18: Propagación de la función de contorno y los diferentes estados que provoca en el gusano transversal y longitudinal asociado

Para el caso de gusanos continuos, estas condiciones siempre se cumplen si la propagación de la función de contorno es sin pérdidas:

> ***Si el gusano es continuo y la propagación es sin pérdidas la evolución siempre será correcta, pues la contracción C(t) permanecerá constante durante la fase de propagación.***

4.4.3.2. Modelo discreto

Para el caso de los gusanos discretos hay que intentar garantizar que la anchura de la ZAG varíe lo menos posible, o lo que es lo mismo, que la longitud proyección L_P varíe menos posible. Esto se consigue cuanto más se ajuste el gusano a la función de contorno. En un modelo discreto, nunca se puede garantizar que C(t) permanezca constantee para todo instante t, pero sí se puede garantizar que la variación sea muy pequeña. De aquí se extrae una conclusión muy importante:

> ***La evolución sólo será totalmente correcta si el gusano es continuo. En los discretos siempre será incorrecta, pero se acercará más a la evolución correcta cuanto más se parezca la forma que adopta el gusano a la función de contorno.***

En la implementación de un gusano, éste es fijo y no se puede variar. Las distancias entre articulaciones (L) no se pueden variar y hay un número fijo de ellas. Por tanto, para conseguir que el movimiento sea más perfecto, habrá que jugar con la función de contorno, seleccionando aquella que mejor cumpla la *regla de avance*. En general cuando mayor sea el perímetro y menor la curvatura, con respecto a la distancia L, el movimiento será más correcto.

Es responsabilidad del diseñador el emplear la función de contorno correcta. Para poder conocer lo buena o mala que es una función de contorno que se utiliza en un mismo gusano, definimos el parámetro **Variación de la longitud proyección** o **VLP**:

$$VLP = \frac{\triangle L_P}{L} = \frac{(L_{P_{max}} - L_{P_{min}})}{L} \tag{4.7}$$

donde $L_{P_{max}}$ y $L_{P_{min}}$ son los valores máximos y mínimos de la longitud proyección en la fase de propagación. El parámetro VLP nos está indicando cuál es la variación de la longitud proyección con respecto a la longitud del segmento. Nos sirve para comparar cómo se comportan dos funciones de contorno cuando se propagan por el mismo gusano transversal. Cuando menor sera VLP, menor será la variación de la longitud del gusano longitudinal generado y por tanto menos fluctuará la contracción $C(t)$.

En la figura 4.19 se muestran dos funciones de contorno que tienen la misma ZA pero el perímetro es mayor en la primera. Se ha dibujado cada función de contorno en dos instantes, que se corresponden con los momentos en lo que el parámetro L_P es máximo y mínimo. La longitud de los segmentos es $L = 50$.

Los datos[2] para la función de contorno 1 son:

[2]Datos obtenidos empleando el programa cube-virtual, descrito en el capítulo 7

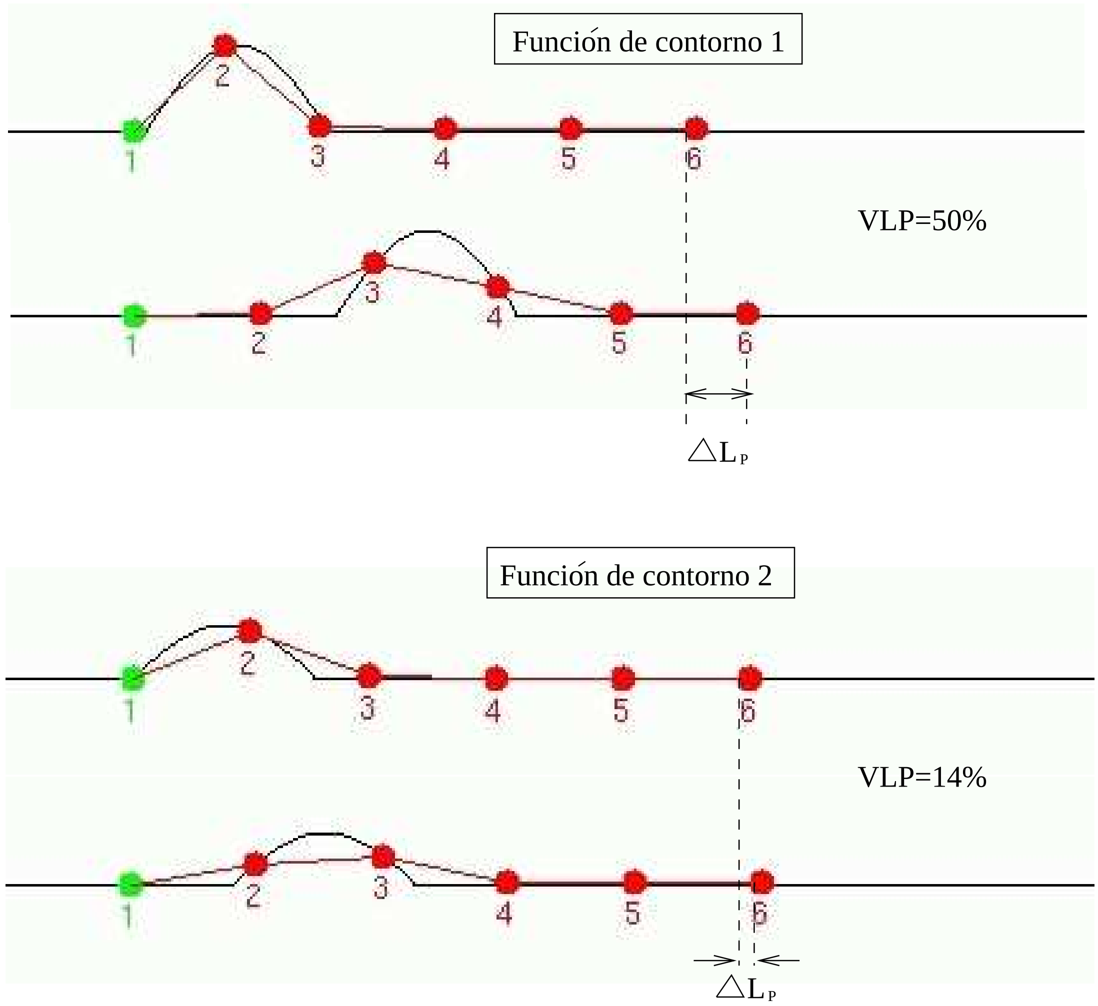

Figura 4.19: Comparación de dos funciones de contorno que recorren el mismo gusano utilizando el parámetro VLP

- $L_{P_{min}} = 225$
- $L_{P_{max}} = 247$
- $VLP_1 = \frac{25}{50} = 0{,}5 \Rightarrow VLP = 50\,\%$

Para la función de contorno 2 tenemos:

- $L_{P_{min}} = 241$
- $L_{P_{max}} = 248$
- $VLP_2 = \frac{7}{50} = 0{,}14 \Rightarrow VLP = 14\,\%$

Como $VLP_2 < VLP_1$ la función de contorno 2 hace que el gusano se mueva mejor.

En el caso de la primera función de contorno la longitud proyección varía en 25 unidades. Esto ocasiona que ciertos puntos se tengan que “arrastrar” por la superficie. El caso ideal es cuando la variación es 0: no hay ningún tipo de arrastre y el gusano se moverá igual de bien por cualquier tipo de superficie. Sin embargo, al haber variación, el movimiento de avance depende del tipo de superficie. Si hay poco rozamiento, los puntos se podrán arrastrar sin dificultad y el gusano avanzará como si nada. Pero si el rozamiento es alto, los puntos no podrán arrastrarse con facilidad y se pueden producir tensiones en las articulaciones.

> ***Cuanto menor sea el parámetro VLP para una función de contorno F, más independiente será el movimiento del gusano con respecto a la superficie. También el movimiento será más predecible***.

En la figura 4.20 se muestra una función de contono con un VLP de un 2 %. En el gusano de la parte superior, $L_{P_{min}} = 246$ y en el de la inferior, $L_{P_{max}} = 247$. La variación es prácticamente nula, por lo que este gusano se desplazará mejor que los de la figura 4.19 y el avance variará muy poco de una superficie a otra. *El movimiento es menos sensible al cambio de superficie*.

Con el parámetro VLP podemos caracterizar lo buena o mala que es una cierta función de contorno cuando se propaga por un gusano. Cuanto mayor sea VLP el movimiento dependerá en mayor medida de la superficie y en general será más impredecible. Sin embargo el avance es posible, aunque sólo sea para algunas superficies concretas.

Existen otros casos en los que la función de contorno no genera una evolución correcta, aunque el VLP sea pequeño:

1. $x(B) - x(A) \leq L$: La longitud de la zona activa es menor o igual que L. En estos casos hay momentos en los que el gusano vuelve a un estado de reposo, es decir, que no hay ninguna articulación activa. Por tanto no hay estado de contracción que se pueda propagar. La incertidumbre en el movimiento es total. En la figura 4.21 se muestra un ejemplo. En la parte superior el gusano está en reposo, pero el estado no es el inicial. En la parte inferior la función de contorno alcanza la articulación a_3 por lo que “de golpe” se activan las articulaciones a_2, a_3 y a_4. Pero en cuanto avance un poco más se volverá al estado de reposo. En este caso no hay una correcta evolución de los estados internos.

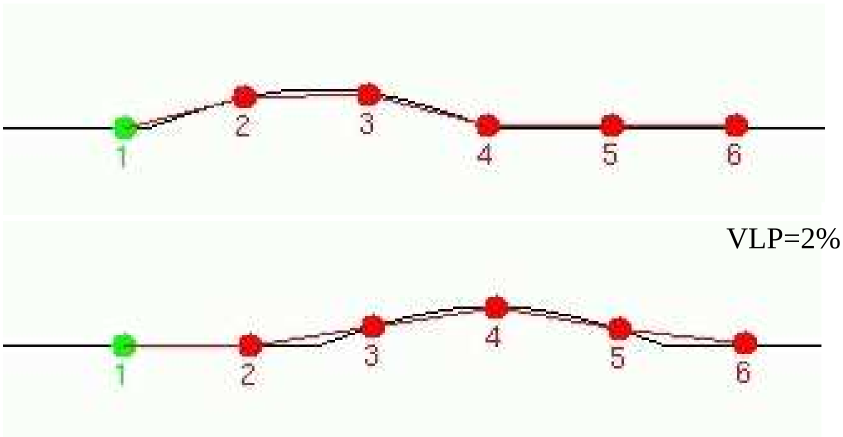

Figura 4.20: Función de contorno que produce una VLP del 2 %

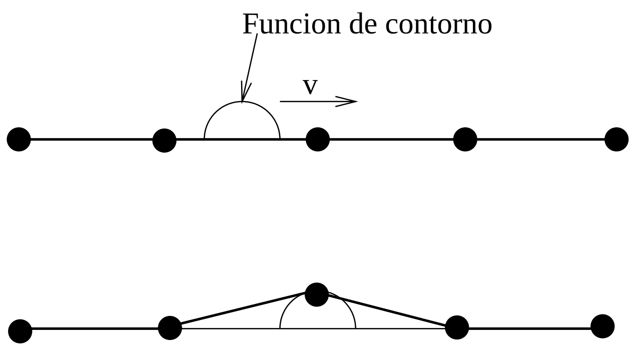

Figura 4.21: La contracción NO se mantiene constante

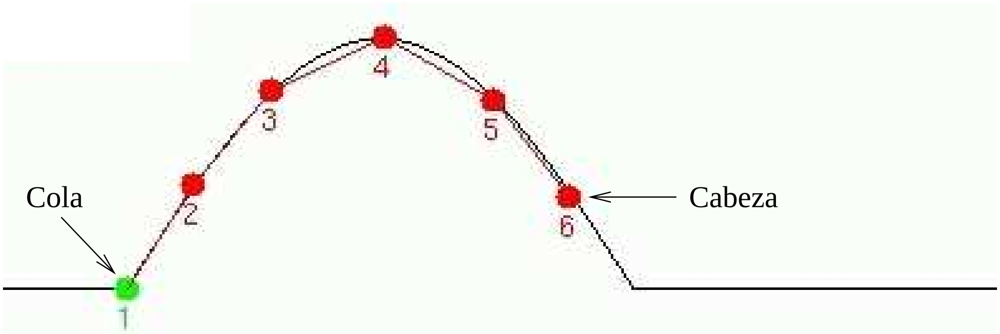

Figura 4.22: Función de contorno incorrecta. El perímetro es más grande que la longitud del gusano.

2. **El caso 1 no se cumple pero** $P(F) > L_T$. El perímetro de la función de contorno es mayor que la longitud total del gusano. La evolución en estos casos es correcta pero no es de la manera que el diseñador quiere, porque ¡¡el gusano no puede volar!! (Ver figura 4.22). La función de contorno debe garantizar que al menos habrá siempre dos puntos sobre el eje de abcisas.

4.5. Estudio del avance

Utilizaremos un gusano continuo para el estudio, por ser más intuitivos y fáciles de dibujar. En un ciclo de avance, partiendo de un estado inicial y llegando a un estado final igual al inicial el gusano ha avanzado una distancia igual a la contracción $C(t)$. En este apartado estudiaremos la velocidad de avance del gusano viendo qué parámetros influyen en ella.

4.5.1. Función de contorno no periódica

Si en un ciclo contracción inicial-propagación-expansión final el gusano ha avanzado una distancia igual a la contracción $C(t)$, la velocidad de propagación es v y la longitud del gusano es L_T, entonces la **velocidad media** es:

$$V_G = \frac{Espacio}{tiempo} = \frac{C(t)}{t_e} = \frac{C(t)}{\frac{L_T}{v}} = v\frac{C(t)}{L_T} \tag{4.8}$$

De esta forma, para aumentar la velocidad de avance del gusano se puede actuar sobre tres factores:

- **Velocidad de propagación** v: A mayor v mayor velocidad del gusano. Sin embargo este parámetro depende de la velocidad con la que las articulaciones cambian de un estado a otro, por lo que depende de las articulaciones en sí.

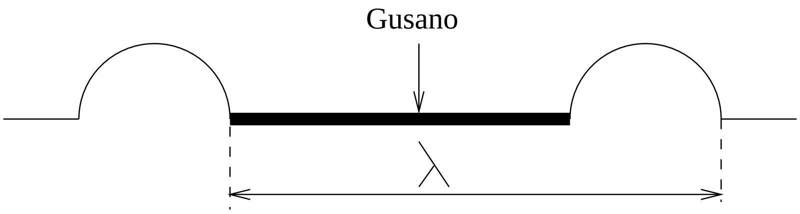

Figura 4.23: Función de contorno periódica, con longitud de onda igual a la zona activa mas la longitud del gusano

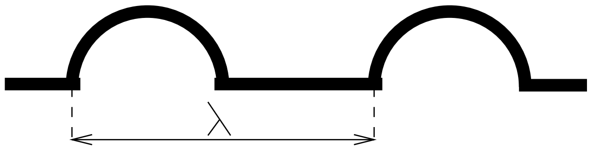

Figura 4.24: Más de una perturbación recorriendo el gusano

- **Contracción** $C(t)$: Cuando mayor sea la contracción, mayor será el avance. La contracción se cambia modificando la función de contorno. Cuando mayor sea el perímetro de la función de contorno, mayor la contracción y por tanto mayor la velocidad.

- **Longitud del gusano**: Un gusano más corto avanza más rápido que uno largo.

4.5.2. Función de contorno periódica

Lo normal será tener una función de contorno periódica, con una longitud de onda λ y un periodo T concretos. Con esto lo que se consigue es aumentar la velocidad de avance del gusano. El caso anterior, el del apartado 4.5.1, es en realidad un caso periódico con una función de contorno que tiene una longitud de onda $\lambda = L_T + [x(B) - x(A)]$, donde $x(B) - x(A)$ es la longitud de la zona activa (Ver figura 4.23). Si la longitud de onda es menor, habrá más de una perturbación propagándose por el gusano, como se muestra en la figura 4.24. En este caso la velocidad de avance es:

$$V_G = \frac{C(t)}{T}$$

Por cada periodo de tiempo T el gusano avanza una distancia $C(t)$. Cuanto menor sea la longitud de onda, menor será T (puesto que $\lambda = vt$ y v permanece constante) y por tanto mayor la velocidad de propagación.

4.6. Implementación de gusanos transversales

Los gusanos transversales son más sencillos de implementar que los longitudinales, debido a que el movimiento no es de deslizamiento. Por ello es un movimiento que depende mucho menos de la superficie por la que se mueva: puede ser lisa, rugosa, con pequeños obstáculos, etc. La

regla de avance sólo se cumple al 100 % en el caso de los gusanos continuos. En una implementación lógicamente este modelo no es posible y tiene que ser discreto. El diseñador debe elegir con cuidado las funciones de contorno de manera que el parámetro VLP sea el mínimo posible.

También hay prestar atención a la **regla de no retroceso**. En el caso de gusanos longitudinales ciertos puntos tenían que quedar fijados a la superfice en ciertos instantes y sólo en ellos. En el caso de los transversales sólo hay que garantizar que al menos quede fijada a la superficie la articulación a_I o a_D. Esto es sencillo porque sólo hay que colocar algún material que se agarre a la superficie y no hay que realizar ninguna coordinación especial.

Las articulaciones se pueden implementar mediante servomecanismos, que se encuentran fácilmente en el mercado y con diferentes características mecánicas. Los segmentos contrátiles de los longitudinales son caros y difíciles de encontrar.

4.7. Resumen

Los **gusanos transversales** son más fáciles de implementar, debido fundamentalmente a sus características mecánicas. El movimiento conseguido depende menos de la superficie por la que se desplaza y es mucho más intuitivo que en los longitudinales, puesto que el gusano debe adoptar la forma de la función de contorno.

Están constituidos por N articulaciones y $N - 1$ segmentos rígidos, de longitud L. Cada articulación tiene un **ángulo de estado interno** $\varphi_i(t)$, que determina la posición relativa de sus partes: el cuerpo y la corona.

Para parametrizar un gusano de este tipo se utilizan los parámetros dinámicos **contracción** $C(t)$, que es similar al parámetro contracción de los longitudinales, y **longitud proyección,** L_P que es la longitud que tiene la proyección del gusano sobre el eje de abscisas. Estos dos parámetros están relacionados.

Para caracterizar los estados internos del gusano se emplea un **vector de estado** $E(t)$ cuyas componentes son los ángulos de estado $\varphi_i(t)$ de cada articulación. La **función de contorno** nos indica cómo va a evolucionar el gusano y especifica cuáles son las posiones (x,y) que deben ocupar las articulaciones. Estas posiciones definen un estado interno φ_i para cada articulación.

Ambos tipos de gusanos están relacionados. **Cada gusano transversal genera un gusano longitudinal**, que es su proyección sobre el eje de abcisas. Los resultados obtenidos para los longitudinales se pueden aplicar a los longitudinales generados y por tanto afectan a los transversales.

Las **tres reglas de avance** también se deben cumplir en los transversales. Para que exista evolución interna se usa un modelo de **propagación de ondas**, en el que la función de contono avanza a una velocidad v y va determinando los estados internos del gusano. La **regla de avance** siempre se cumple en el caso de un modelo de gusano continuo, sin embargo no lo hace cuando es discreto. Mediante el **parámetro VLP** se puede determinar cuánto de buena es una función de contorno, dado un gusano y nos permite seleccionar la función de contorno que mejor garantice esta regla. La **condición externa de no retroceso** también se tiene que cumplir.

Finalmente se ha estudiado la **velocidad media de avance** y los parámetros implicados, de manera que el diseñador sepa cómo poder modificar esta velocidad.

Capítulo 5

Gusano transversal: algoritmo de ajuste

5.1. Introducción

Para implementar un gusano transversal es preciso determinar primero los algoritmos necesarios para poder obtener los vectores de estado $E(t)$ y enviárselos al gusano real. Éste es el objetivo del presente capítulo.

Primero se planterá el problema que se quiere resolver. Después estudiaremos diferentes alternativas para solucionarlo y finalmente se presentará el algoritmo de ajuste, que permite solucionarlo de una manera muy intuitiva.

5.2. Planteamiento del problema

Para mover un gusano transversal, bien virtual o bien real, necesitamos generar una secuencia de vectores de estado $E(t)$, que definan la evolución interna. Ahora no nos preocuparemos de si esta evolución es correcta ni qué condiciones externas deben ocurrir. Lo que queremos saber es cómo calcularla.

Las sencuencias se calculan para M instantes de tiempo diferentes, obteniéndose M vectores de estado $\{E(t_1), ..., E(t_M)\}$. Una vez obtenidos, se pueden almacenar y cargar en aplicaciones que muevan gusanos virtuales o reales. En este capítulo nos preocuparemos de cómo obtener una secuencia.

En la figura 5.1 se muestra qué es lo que se quiere conseguir. Inicialmente, en el instante t_1 el gusano está en el estado determinado por el vector $E(t_1)$ y todas las articulaciones cumplen la función de contorno: el gusano está "ajustado" a la función. En el instante t_2 la función de contorno se ha propagado una distancia, pero el gusano permanece en el mismo estado $E(t_1)$ anterior. Lo que nos interesa es obtener el estado $E(t_2)$ a partir de $E(t_1)$ y de $P(x, t_2)$. Hay que "ajustar" el gusano del estado t_1 a la nueva función de contorno.

El problema que se quiere resolver es el **problema de ajuste**, y se enuncia así:

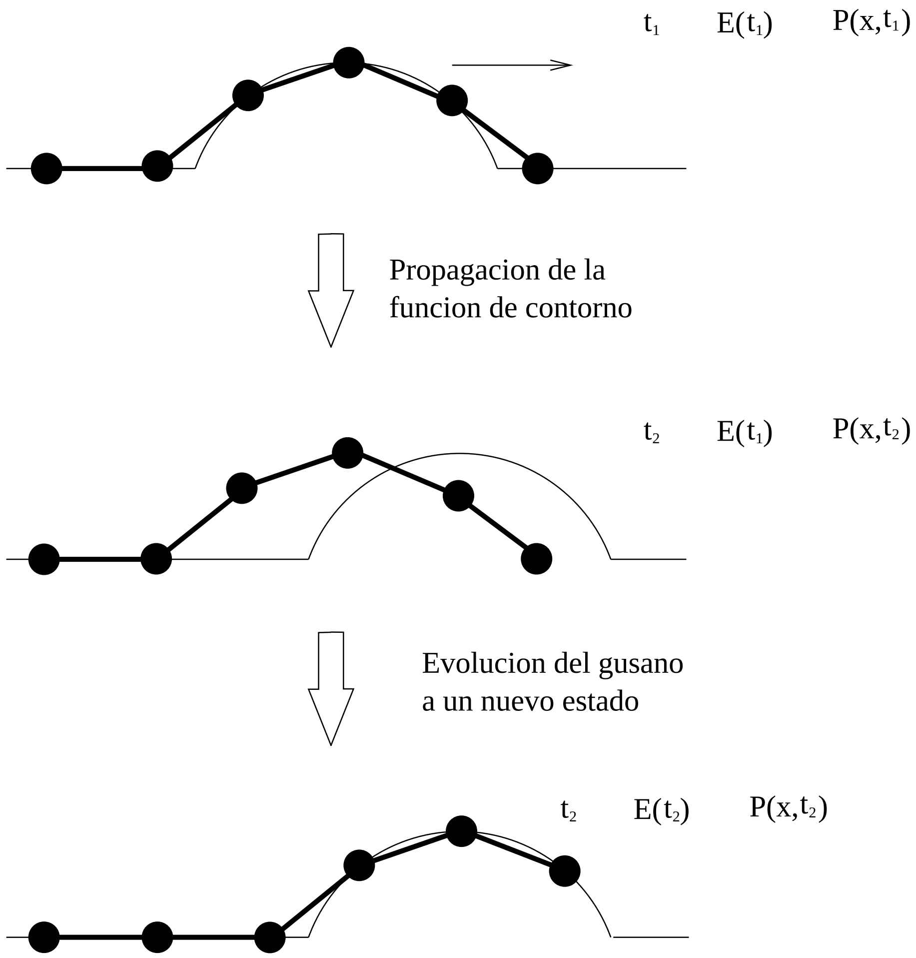

Figura 5.1: Fundamentos de la generación de una secuencia

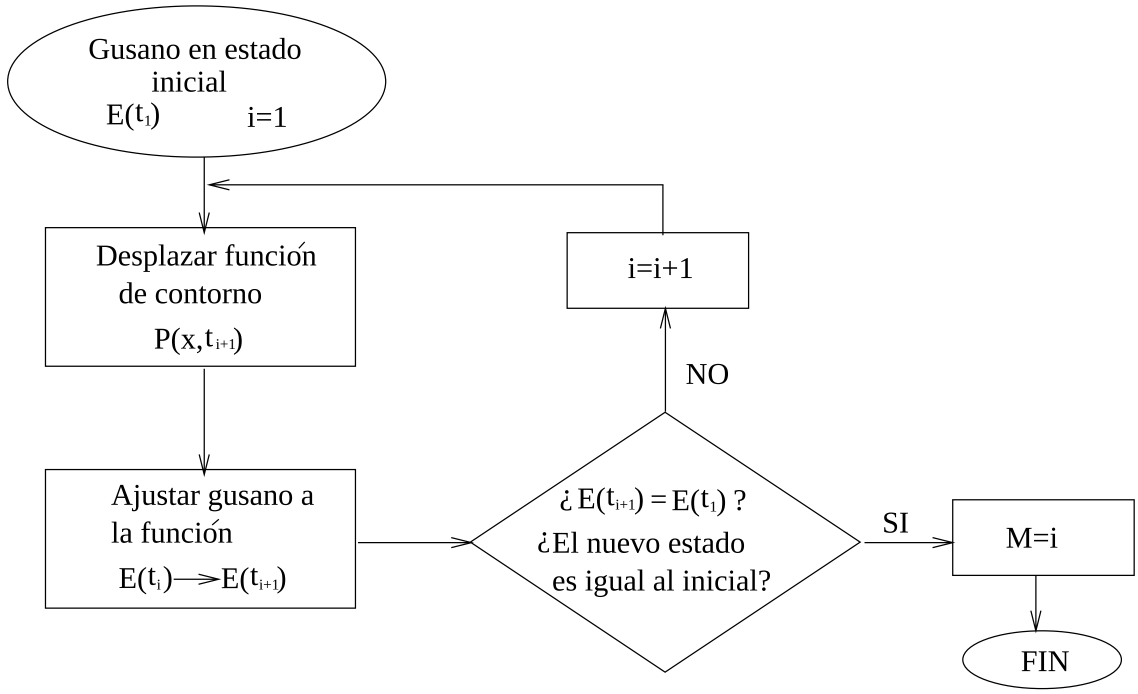

Figura 5.2: Algoritmo genérico para generar una secuencia de M estados

Dado un gusano transversal con un estado caracterizado por $E(t_1)$ ***y conociendo la función de contorno*** $P(x, t_2)$ ***en otro instante, calcular el nuevo vector de estado*** $E(t_2)$ ***que hace que el gusano se ajuste a esa función de contorno.***

Conociendo la solución al problema de ajuste, es muy sencillo obtener una secuencia. Sólo hay que partir de un estado inicial conocido, desplazar la función de contorno, aplicar la solución para obtener el siguiente estado y repetir el proceso hasta alcanzar nuevamente el estado inicial. Esta secuencia caracteriza ese movimiento y se puede hacer que el gusano la repita cíclicamente, consiguiéndose el movimiento de avance deseado. En la figura 5.2 se muestra el algoritmo para generar la secuencia, basado en la solución del problema de ajuste.

5.2.1. Simplificaciones

La solución al problema de ajuste nos indica cómo pasar de un estado genérico $E(t_1)$ a otro $E(t_2)$, conociendo la función de contorno. Para mayor facilidad, y sin perder generalidad, supondremos lo siguiente:

1. El estado inicial es el de reposo $E(t_1) = (0, ..., 0)$. La solución encontrada para este caso particular es válida en el caso de que el estado inicial sea otro.

2. El origen de coordenadas se establece inicialmente en la articulación de cola a_1 y su abcisa la fijaremos a cero en todo momento, $x(a_1) = 0$. Va a ser la articulación de referencia sobre la que aplicar el ajuste.

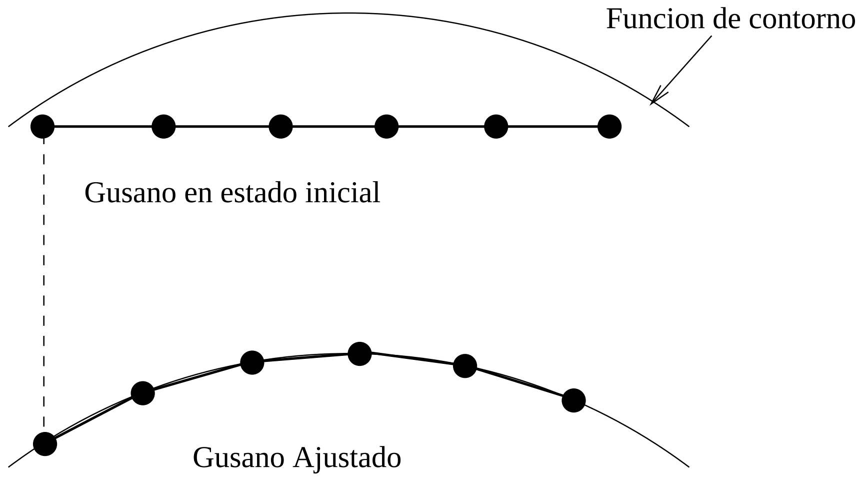

Figura 5.3: Problema del ajuste

El **problema de ajuste** se puede enunciar de otra manera:

> ***Partiendo de un gusano en estado de reposo, y dada una función de contorno, calcular el estado del gusano que hace que todas sus articulaciones cumplan la función de contorno, fijando la abcisa de la articulación de cola a 0***.

En la parte superior de la figura 5.3 se muestra un gusano de 6 articulaciones en el estado de reposo y una función de contorno. En la parte inferior el gusano se ha ajustado a dicha función. Obsérvese que la coordenada x de la articulación de cola no ha variado, sino que está fija.

Esto todavía se puede simplificar más teniendo en cuenta que el ajuste de la articulación de cola es un simple desplazamiento. Su ordenada se calcula directamente a través de la función de contorno: $y(a_1) = F(x(a_1)) = F(0)$. No perdemos generalidad si suponemos que el origen de coordenadas está situado en la articulación a_1 y que la función de contorno deba pasar por ese origen. El nuevo enunciado del problema de ajuste es:

> ***Partiendo de un gusano en estado de reposo, con el origen de coordenadas situado en la articulación de cola, y dada una función de contorno que pase por el origen, calcular el estado del gusano que hace que todas sus articulaciones cumplan la función de contorno***.

Obsérvese que estamos introduciendo cada vez más restricciones que no afectan a la generalidad del problema, pero que lo simplifican y nos ayudan a resolverrlo más facilmente.

5.2.2. Problema de ajuste para un segmento

Si se conoce la solución para una articulación, se puede ajustar el gusano entero, amplicando una iteración desde la articulación 1 hasta la N. Un ejemplo se muestra en la figura 5.4. Se parte de un gusano en reposo, con una función de contorno que pasa por el origen situado en la

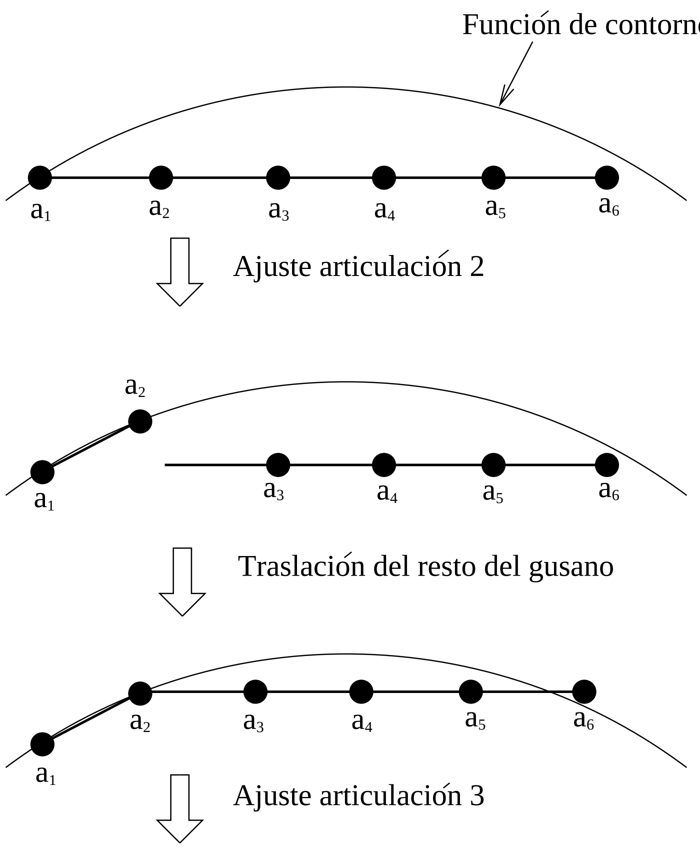

Figura 5.4: Aplicación iterativa del ajuste de una articulacion

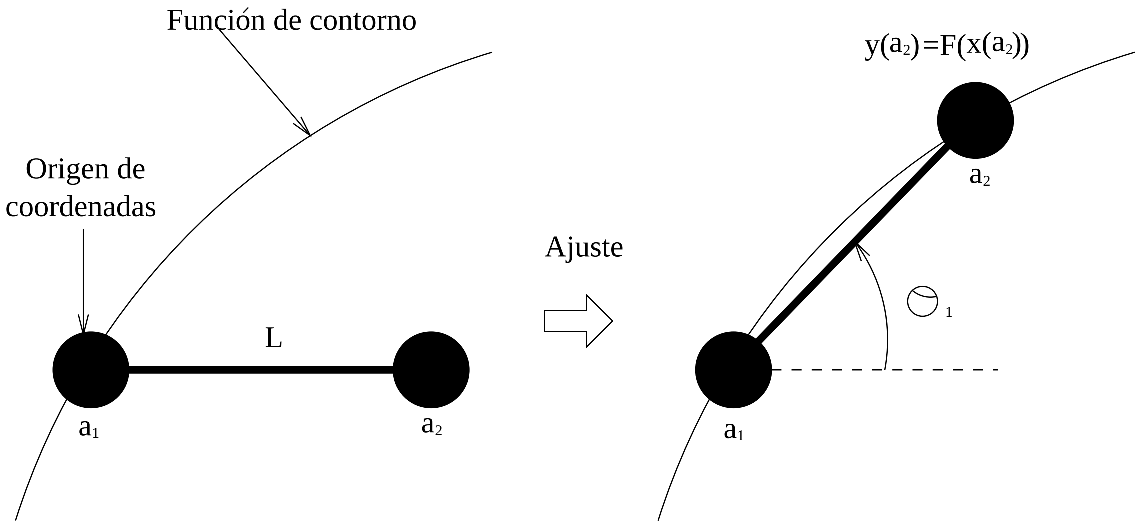

Figura 5.5: Problema de ajuste aplicado a un gusano de 1 segmento y dos articulaciones

cola. Primero se aplica la solución a la articulación a_2, luego se hace una traslación del resto del gusano, se sitúa el origen en la articulación a_2 y se vuelve a aplicar la solución para ajustar la a_3. Así sucesivamente hasta ajustar el gusano completo.

El problema que queda por resolver se reduce a:

> ***Dado un gusano constituido sólo por dos articulaciones unidas por un segmento de longitud L, que se encuentra en reposo, y dada una función de contorno que pasa por el origen situado en la cola del gusano, calcular el ángulo θ_1 que hace que la articulación a_2 cumpla la relación $y(a_2) = F(x(a_2))$.***

En la figura 5.5 se ha dibujado el problema a resolver. El ángulo θ_1 está medido desde la horizontal. El problema es ahora mucho más simple y más abordable.

5.3. Estudio de alternativas

En esta apartado se estudia la solución al problema de ajuste de una articulación, presentado en el apartado 5.2.2.

5.3.1. Solución analítica

Supongamos una situación genérica mostrada en la figura 5.6. Lo que queremos son las coordenadas (x,y) del punto de intersección entre la función de contorno y la circunferencia con centro en la articulación 1 y radio L, que pasa por la articulación 2.

Por estar los puntos dentro de la circunferencia deben cumplir:

$$x^2 + y^2 = L^2 \tag{5.1}$$

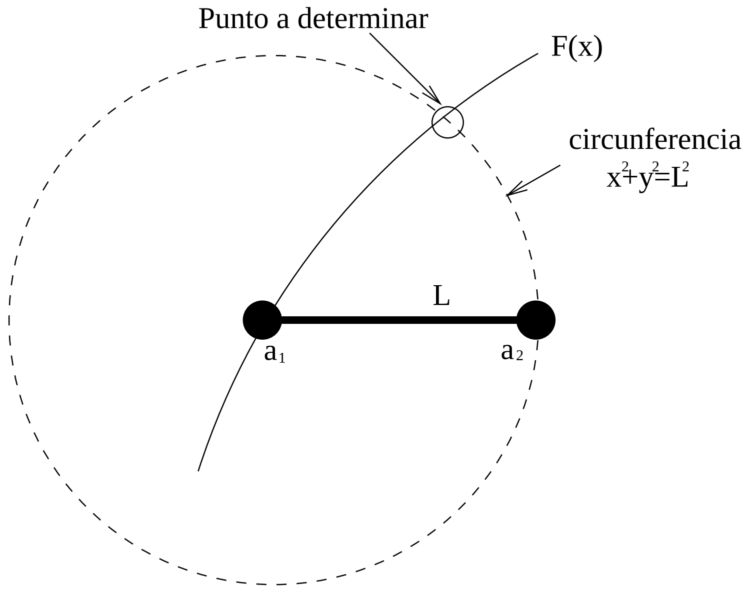

Figura 5.6: Calculo del punto final como intersección de F(x) con una circunferencia

y por pertenecer a la función de contorno:

$$y = F(x) \tag{5.2}$$

Eliminando la variable y de ambas ecuacione se obtiene la **ecuación de ajuste**:

$$x^2 + F^2(x) = L^2 \tag{5.3}$$

que nos permite calcular el valor de x del punto ajustado.

Sin embargo, no hay que dejarse arrastrar por la aparente simplicidad de la ecuación de ajuste. Si la función F(x) es una función lineal, la ecuación es de segundo grado y por tanto se podrá resolver analíticamente sin problemas. El problema es que una función lineal no es de mucha utilizadad como función de contorno. Si F(x) es una función polinómica de grado menor o igual que 2, la ecuación de ajuste es una función polinómica de grado $\geq$4, y aquí ya empiezan los problemas analíticos.

Pero si F(x) es una función trigonométrica, como por ejemplo $F(x) = sen(x)$, la ecuación de ajuste que queda es:

$$x^2 + sen^2(x) = L^2$$

que no se puede resolver analiticamente. Por tanto hay que buscar soluciones no analíticas al problema de ajuste.

5.3.2. Solución numérica

La solución numérica consiste en dar valores a x hasta que el error sea lo más cercano posible a 0. La función de error empleada es:

$$e(x) = \left| x^2 + F^2(x) - L^2 \right| \tag{5.4}$$

Esta función toma el valor 0 cuando el valor de x cumple la ecuación de ajuste. Cuanto mayor sea el error, más alejado está el valor x del valor correcto. El valor máximo de la x es L, que es la longitud del segmento (un valor más alto no tiene sentido) y el valor mínimo es 0, que se obtiene cuando el ángulo de la articulación es de 90^0. Por tanto sabemos que la x solución de la ecuación de ajuste está comprendida en el entorno $x \in [0, L]$. Si el valor inicial de x es L, es decir, que $x_0 = L$, se obtiene un valor del error de $e(x_0)$. Disminuyendo el valor x en un incremento: $x_1 = x_0 - \triangle x$, y calculando en nuevo error $e(x_1)$, se puede ver si el nuevo error es menor que el anterior o por el contrario es mayor.

De esta manera conseguimos encontrar el valor de x que hace mínimo el error, en el entorno [0,L].

En la figura 5.7 se ha dibujado la función de error para una función de contorno sinusoidal y un valor $L = 2$:

$$e(x) = \left| x^2 + sin^2(x) - 4 \right|$$

5.4. El algoritmo de ajuste

En el apartado anterior hemos visto que la ecuación de ajuste se puede resolver numéricamente, consiguiendo tanta precisión como queramos, según cómo sea el incremento de la x. Sin embargo es más intuitivo resolver el problema de una manera más gráfica y más relacionada con el problema de ajuste, en vez de resolver una ecuación.

A este procedimiento se le ha denominado **algoritmo de ajuste**.

5.4.1. Propagación del algoritmo de ajuste

El algoritmo de ajuste sólo hay que realizarlo para una articulación, pudiéndose propagar al resto. La propagación se muestra en la figura 5.8. Primero se ajusta la articulacion 1, que es trivial puesto que sólo hay trasladar el gusano en el eje de las ordenadas hasta que se ajuste. Despues se ajusta la número 2, para lo cual se rota todo el gusano con centro en la articulación 1. A continuación la número 3, con rotación del gusano con centro la articulación 2. Se puede pensar como si el gusano fuese rígido, y cada vez sólo se puede rotar con respecto a una articulación. Primero se rota con respecto a la 1, luego a la 2, etc, hasta llegar al final. Cuando se ha rotado con respecto a todas las articulaciones el gusano está ajustado. Este algoritmo de propagación es muy intuitivo y sobre todo se pueden dibujar en la pantalla los estados intermedios.

5.4.2. Aplicación a una articulación

El algoritmo en cuestión es el siguiente. Queremos que la articulación i se sitúe sobre la función de contorno, realizando una rotación de la articulación $i - 1$, que ya se encuentra sobre la función de contorno.

Lo que se hace es rotar la articulación i, con respecto a la $i - 1$ un ángulo $\triangle\theta$ y se va evaluando la función de error (ec. 5.4) hasta encontrar un valor mínimo. En ese momento ya tenemos ajustada la articulación.

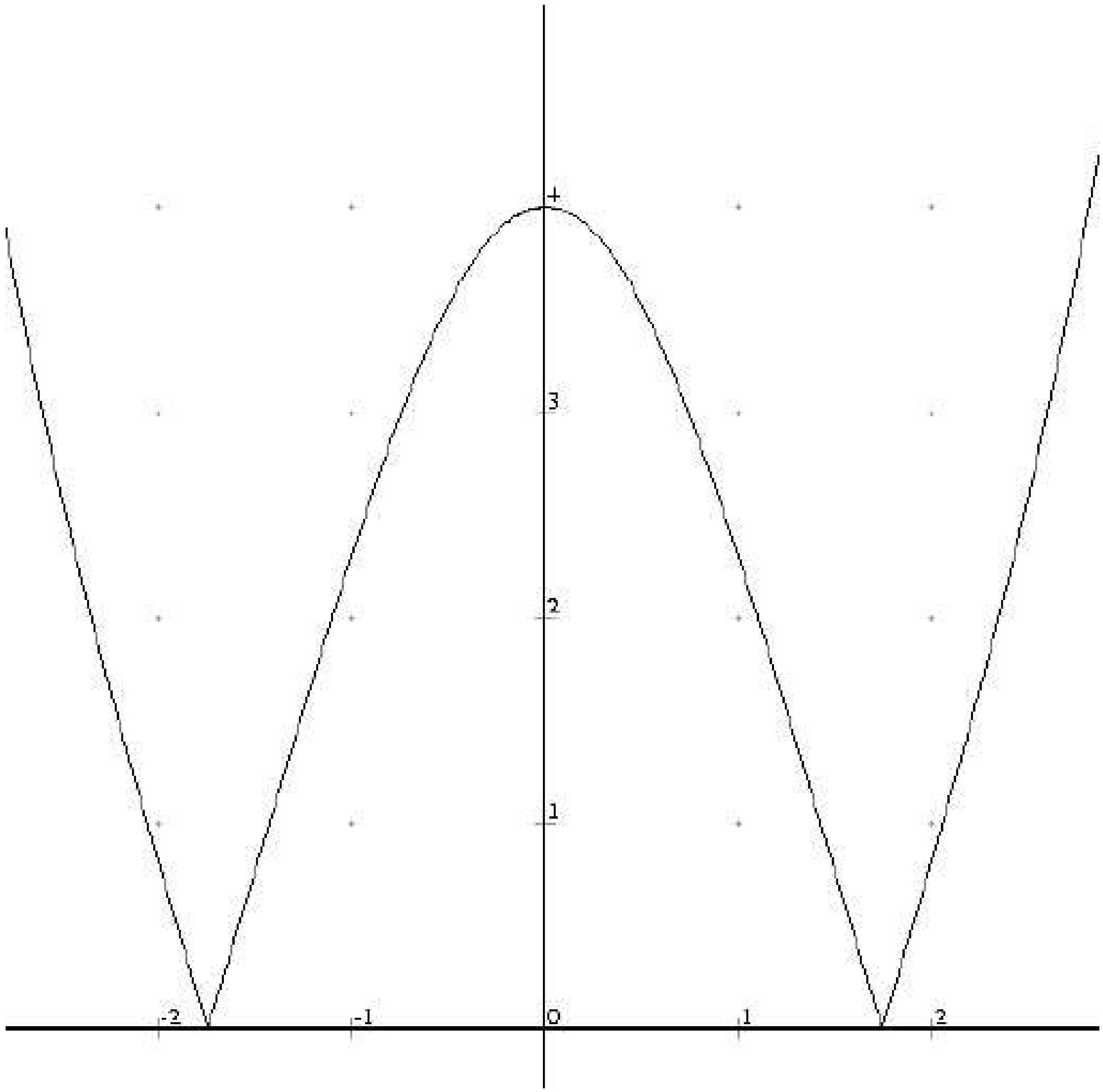

Figura 5.7: Una función de error ejemplo, generada con el programa kplot

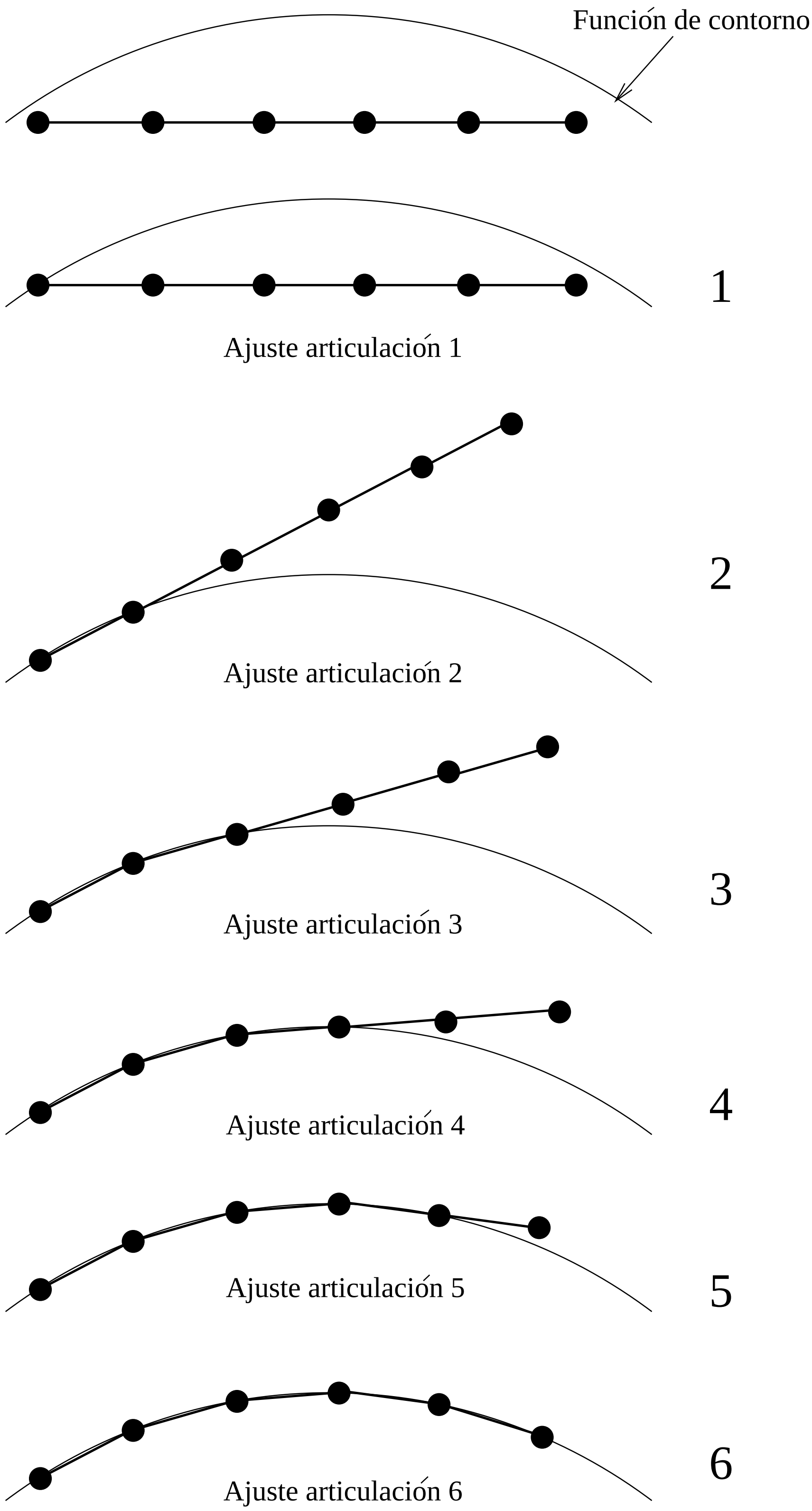

Figura 5.8: Propagación del algoritmo de ajuste

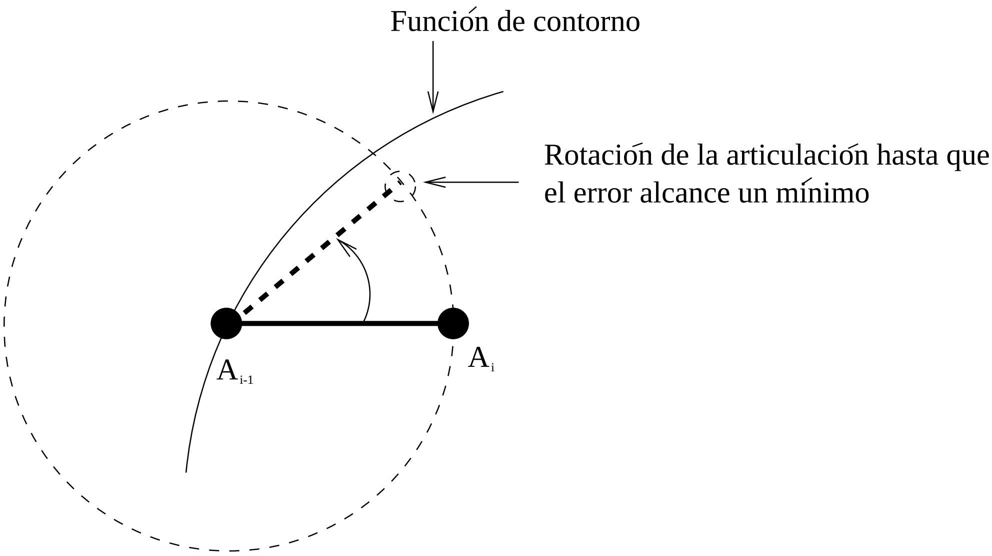

Figura 5.9: Algoritmo de ajuste

Cuando menor sea el incremento angular, mayor será la precisión en el ajuste, pero más tiempo se tardará en ajustar (Fig 5.9).

Utilizando una búsqueda binaría el tiempo será mucho menor. Sin embargo en los casos en los que se aplica el algoritmo de ajuste, las articulaciones se encuentran muy cerca del punto final por lo que es bastante rápido y no hace falta complicar el software implementando una búsqueda binaria. El valor de $\triangle\theta$ tomado es de 1^o consiguiéndose un compromiso entre velocidad y precisión muy bueno.

5.4.3. Sentido de rotación inicial

Para aplicar el algoritmo correctamente, hay que saber a priori hacia qué dirección hay que rotar la articulación para que el error disminuya. Eso se calcula fácilmente mediante la función "sentido":

$$S = F(x) - y \tag{5.5}$$

Si $S > 0$ hay que incrementar el ángulo θ, de manera que la articulación se aproxime a la función de contorno por abajo y si $S < 0$ hay que decrementarlo y entonces la aproximación es por arriba.

5.4.4. El ángulo inicial de ataque

Cuanto menores sean los incrementos del ángulo, mejor será el ajuste, es decir, que menor será el error pero sin embargo más calculos habrá que realizar y mayor será el tiempo de ajuste. El tema se agrava si el ángulo final de ajuste es muy diferente del que tiene la articulación, y por

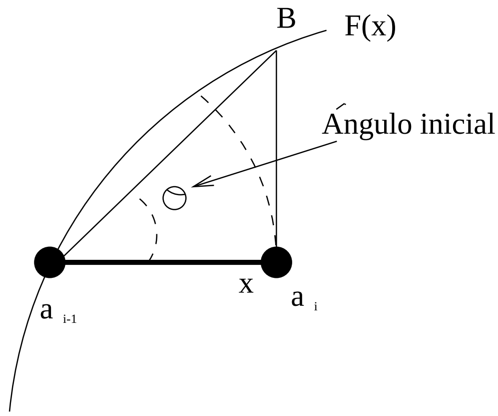

Figura 5.10: Ángulo inicial

tanto hay que avanzar un ángulo muy grande en incrementos muy pequeños, calculando en todo momento la función de error.

Para solucionar esto se puede partir de un ángulo inicial de ataque diferente al que tiene la articulación. En la figura 5.10 se muestra un ejemplo. La articulación a_i se encuentra en una posición inicial (x, y) conocida. Teniendo en cuenta el triángulo formado por los puntos B, a_{i-1} y a_i, un ángulo inicial de ataque muy bueno es:

$$Tg(\theta) = \frac{F(x)}{x} \Rightarrow \theta = arctan\left(\frac{F(x)}{x}\right) \tag{5.6}$$

que está mucho más cercano al ángulo final de ajuste.

5.4.5. Pasos del algoritmo

A continuación se describen los pasos del algoritmo final para lograr el ajuste del gusano.

- Estado inicial: La articulación 1 se encuentra situada sobre la función de contorno
- Repetir los siguientes pasos para cada articulación $i \in \{2..N-1\}$

1. Calcular el ángulo de inicio, mediante la ecuación 5.6
2. Situar la articulación i en ese ángulo, rotando la articulación $i-1$
3. Determinar el sentido de incremento mediante la ecuación 5.5. Eso fija el signo de $\triangle\theta$
4. Calcular el error actual ε
5. $\theta' = \theta + \triangle\theta$
6. Calcular el nuevo error ε'
7. ¿$\varepsilon' > \varepsilon$?

a) Sí, el nuevo error es mayor, θ es el ángulo que minimiza.
   1) Guardar el valor de θ
   2) La articulación i está ajustada. Incrementar i
   3) Volver al punto 1 si $i < N$

b) No, θ' reduce el error. Hacer $\theta = \theta'$ y pasar al punto 5

El valor de $\triangle\theta$ tomado en la implementación es de 1^o.

5.5. Resumen

Para generar **secuencias** de estados internos se parte de un estado inicial $E(t_1)$, se desplaza la función de contorno y se obtiene el siguiente estado $E(t_2)$. El proceso se repite hasta llegar nuevamente al estado inical.

El calcular el nuevo estado a partir del anterior y de la función de contorno recibe el nombre de **problema de ajuste**. Este problema se puede simplificar resolviéndolo sólo para un segmento y aplicándolo al resto.

Se han estudiado dos alternativas para solucionar el problema de ajuste, una analítica y una numérica. Sin embargo es más intuitivo emplear el **algoritmo de ajuste**, mediante el cual se varía el ángulo de la articulación i hasta que se minimiza la función de error y la articulación $i + 1$ queda ajustada. Esto se repite con todas las articulaciones.

Capítulo 6

Mecanismos de movimiento III: giros

6.1. Introducción

Hasta ahora se ha hablado de gusanos unidimensionales, que sólo se pueden desplazar a lo largo del eje x. En la realidad, los gusanos se pueden desplazar también por planos, cambiando de dirección. En este capítulo se presenta un modelo de gusano, al que denominaremos **gusano tridimensional**, con el que se aborda el problema. Se analizan sus parámetros, se caracteriza y finalmente se diseña un algoritmo para permitir el giro. Antes de presentar el gusano tridimensional es útil tener en la cabeza los modelos ya vistos, ya que el tridimensional se puede descomponer en otros más sencillos con los que es más fácil trabajar.

6.2. Gusano plano rígido

6.2.1. Introducción

Definimos **gusano plano rígido** como un gusano que tiene N articulaciones y $N-1$ segmentos rígidos, de longitud L_0, que está situado sobre el plano xy. Las articulaciones se mueven de manera que el gusano siempre permanece dentro del plano. El modelo es similar al de un gusano transversal, con la diferencia de que está en el plano xy. Las articulaciones, iguales que las presentadas en el apartado 4.2.1.1, están colocadas de manera que los segmentos interior y exterior se mueven permaneciendo siempre en el plano xy (ver figura 6.1).

6.2.2. Parámetros

Los parámetros de modelado son los mismos que los de un gusano transversal (apartado 4.2.1):

- N: **Número de articulaciones**, denotadas como a_1 hasta a_N.

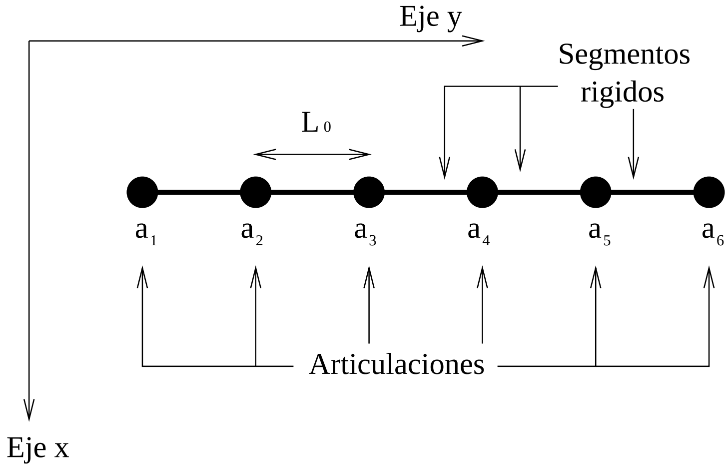

Figura 6.1: Un gusano plano rígido

- L_T: **Longitud del gusano.**
- θ_i: **Estado de orientación** de la articulación i. Ángulo en el que se encuentra la articulación i. El convenio de signos es el mismo que el utilizado para el ángulo φ (apartado 4.2.1.1)

El resto de parámetros, como la longitud proyección L_P o la contracción $C(t)$ no son de interés.

6.2.3. Caracterización

Cada articulación queda caracterizada por su ángulo de orientación $\theta_i(t)$ y el gusano completo por el vector de orientación, $E_o(t)$, que tiene N componentes que indican los estados de orientación de cada articulación:

$$E_o(t) = (\theta_1(t), ..., \theta_N(t))$$

Las articulaciones a_1 y a_N, cabeza y cola, son ficticias y no se implementan en el gusano real. La articulación a_N indica el estado de orientación de algún tipo de sensor que se sitúe en la cabeza y la a_1 refleja la orientación del gusano entero dentro del plano xy, con respecto al eje y.

Para θ_N siempre tomaremos el valor cero. El vector de orientación cuando se encuentra el gusano en reposo es: $E_o(t) = (0, ..., 0)$, con todas sus componentes a cero. Se corresponde con un gusano que está orientado en dirección del eje y, dentro del plano $z = 0$. En la figura 6.2 se muestran dos gusanos, uno en estado de reposo y otro en el estado $E_o(t) = (0, 0, -45, 0, 0, 0)$.

En la figura 6.3 se ha dibujado un gusano en reposo y uno en el estado $E_{o_1}(t) = (-45, 0, 0, 0, 0, 0)$. Sólo se diferencian en el estado de la articulación a_1. En el estado $E_{o_1}(t)$, la componente $\theta_1 = 30$ está determinando la orientación en el plano xy de todo el gusano. El estado de orientación se toma con respecto a un eje paralelo al y.

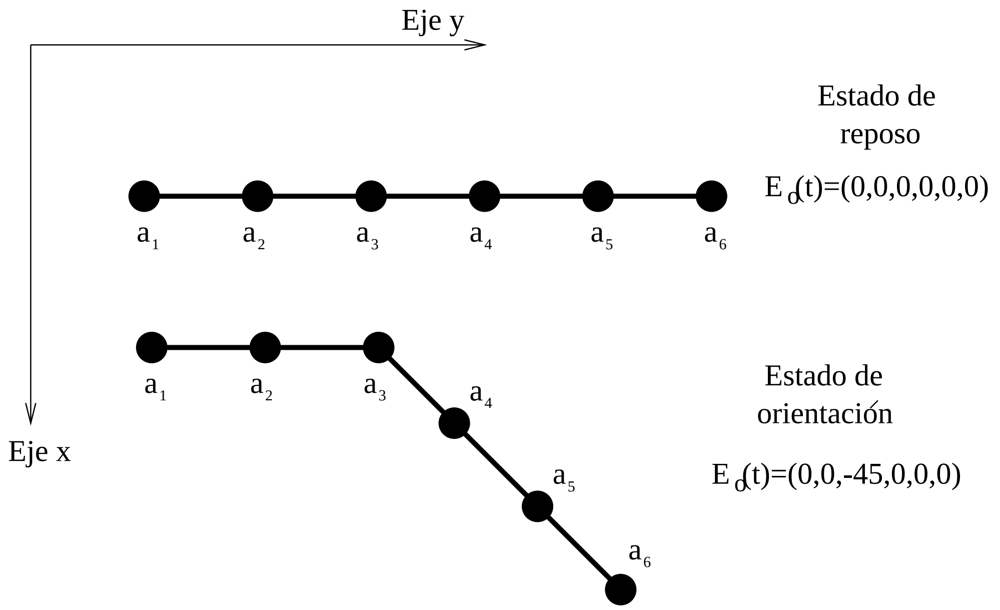

Figura 6.2: Un gusano plano rígidos en diferentes estados

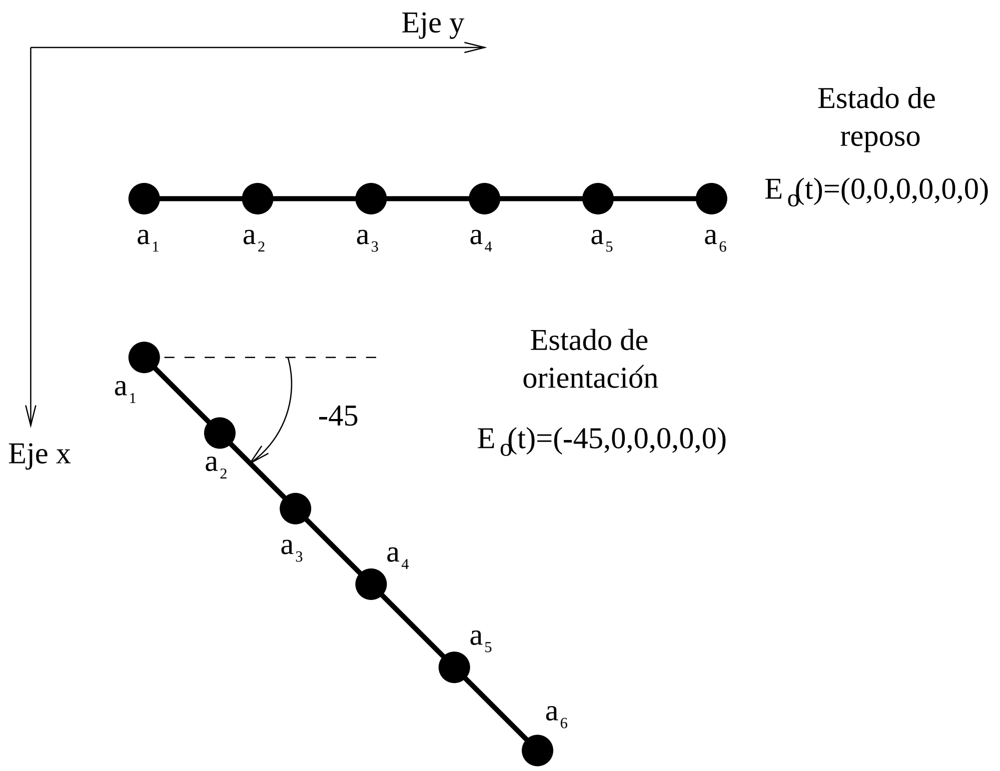

Figura 6.3: Gusano plano rígido con un estado diferente de la articulación de la cola

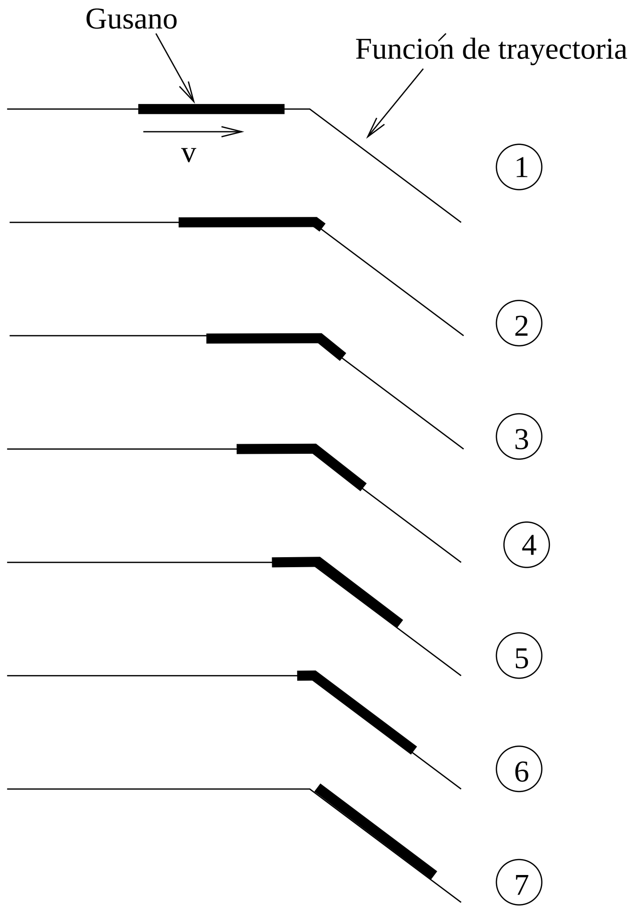

Figura 6.4: Gusano avanzando por una función de trayectoria

6.2.4. Función de trayectoria

La **función de trayectoria** es a los gusanos planos lo que la función de contorno a los transversales. Es la función que determina los estados futuros de evolución. Supondremos que el gusano plano es capaz de desplazarse a una velocidad v por la superficie, por ejemplo porque esté dotado de ruedas motrices.

En la figura 6.4 se muestra un gusano plano continuo (N muy grande y $L_0 \to 0$), que está siguiendo el camino descrito por una **función de trayectoria**.

La función de trayectoria indica las posiciones dentro del plano xy que deben cumplir todas las articulaciones del gusano. Es decir, el gusano debe estar "ajustado" a la función de trayectoria en todo momento. La forma de estas trayectorias puede ser cualquiera, no obstante trabajaremos con trayectorias simples, constituidas por dos segmentos que forman un determinado ángulo.

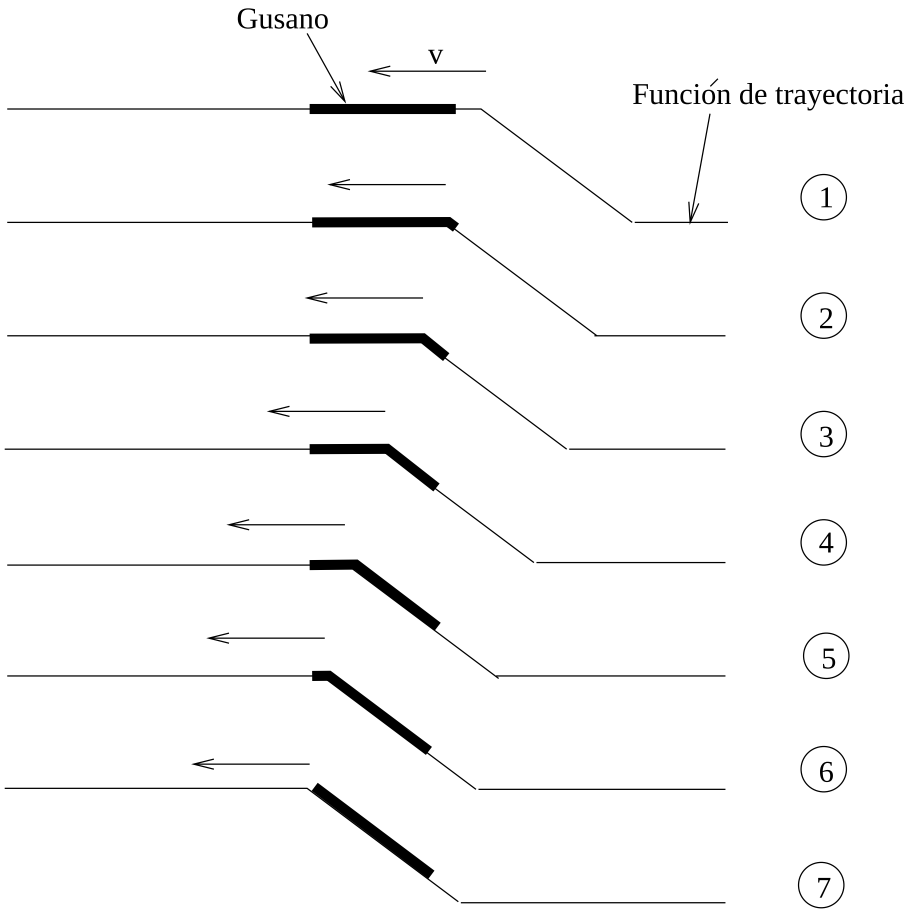

Figura 6.5: Función trayectoria propagándose por un gusano

6.2.5. Evolución de los estados de orientación

Usemos como ejemplo el gusano de la figura 6.4. El estado de este gusano está determinado por los ángulos en los que se encuentran estas articulaciones. Fijémonos en el estado interno, ¿Cómo es la evolución?. El estado inicial es exactamente igual al final, pero entre medias ha habido un cambio. Imaginemos que antes de realizar el 'giro' se encuentra en el estado (0,...,0). En cuanto la articulación de la cabeza realiza el giro (articulación N), y suponiendo que cambie al estado α, el nuevo estado es (0,...,0,α). Según va avanzando el gusano, el estado se esta articulación se va propagando hacia las articulaciones de la cola, de manera que la evolución de estados sería en ciertos instantes: (0,...,α,0), (0,..0,α,0,0), ... (0,α,0,..0), (α,0,..,0), (0,..,0).

Se vé claro que se puede expresar la evolución interna mediante una función de trayectoria que se propaga desde la cabeza hasta la cola y a la que el gusano se va ajustando. En la figura 6.5 se muestra el mismo gusano que en la figura 6.4, pero con una diferencia: ahora el gusano está quieto y lo que se propaga es la función de trayectoria. Los estados internos del gusano son exactamente los mismos.

Para calcular los estados internos se hace exactamente igual que en el caso del gusano trans-

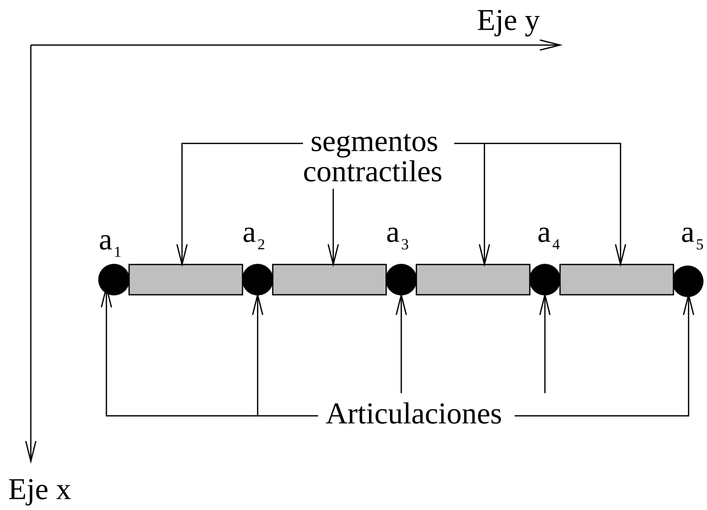

Figura 6.6: Gusano plano contráctil de 5 articulaciones y 4 segmentos

versal. Se aplica el algoritmo de ajuste con respecto a la función de trayectoria, empezando por la articulación de la cola, donde está situado el origen, y avanzando hasta tener el gusano completamente ajustado. El siguiente estado se obtiene desplazando hacia la izquierda la función de transferencia y volviendo a aplicar el algoritmo de ajuste. Si la función de trayectoria es $T(x)$, la función desplazada es:

$$P(x,t) = T(x + vt)$$

siendo v la velocidad con la que el gusano avanza.

6.3. Gusano plano contráctil

6.3.1. Introducción

Llamaremos **gusano plano contráctil** a un gusano plano cuyos segmentos son contráctiles, en vez de ser rígidos y con una longitud fija. De ahora en adelante los denominaremos simplemente como **gusanos planos**. En la figura 6.6 se muestra un gusano plano de cinco articulaciones y cuatro segmentos.

6.3.2. Parámetros

Los parámetros son los mismos que para el gusano plano rígido, además de los necesarios para los segmentos:

- L_0: **Longitud natural o de reposo**. Es la longitud que tienen los segmentos cuando no están contraidos ni expandidos.

- $l_i(t)$: **Longitud del segmento** i

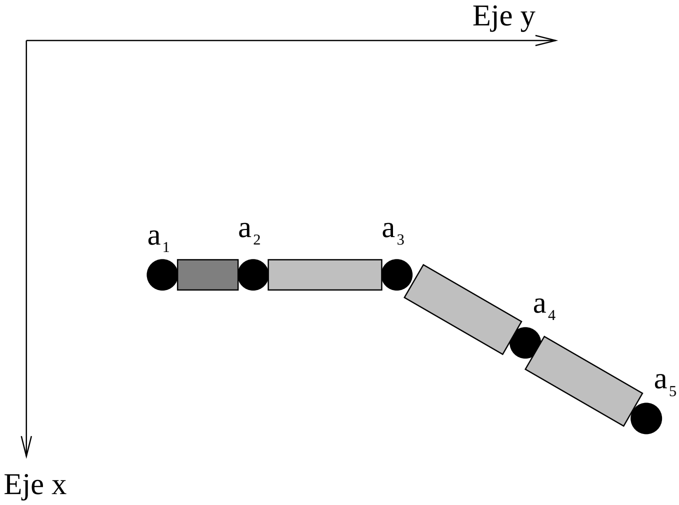

Figura 6.7: Un gusano plano con un vector de estado de [(A,0,0,0),(0,0,30,0,0)]

- $c_i(t)$: **Contracción del segmento** i, definida como la diferencia entre la longitud natural y la longitud del segmento:
$$c_i(t) = L_0 - l_i(t)$$

- L_{T_0} : **Longitud total natural o de reposo**. Es la longitud del gusano plano cuando todos los segmentos están en reposo.

- $L_T(t)$: **Longitud total del gusano**. Para las longitudes despreciaremos el tamaño de las articulaciones considerándolas puntuales.

- $C(t)$: **Contracción total**, calculada como la diferencia entre la longitud total de reposo y la longitud total:
$$C(t) = L_{T_0} - L_T(t)$$

6.3.3. Caracterización

Las articulaciones se caracterizan por el ángulo de orientación $\theta_i(t)$ y los segmentos por la contracción $c_i(t)$. Por ello son precisos dos tipos de vectores diferentes para caracterizar el estado de un gusano plano:

- **Vector de orientación**: $E_o(t) = (\theta_1, ..., \theta_N)$

- **Vector de contracción**: $E_c(t) = (c_1(t), ..., c_{N-1}(t))$

Estos dos vectores forman el **vector de estado del gusano plano**: $E(t) = [E_c(t), E_o(t)]$. En la figura 6.7 se ha dibujado un gusano plano que está en un estado caracterizado por $E(t) = [(A, 0, 0, 0), (0, 0, 30, 0, 0)]$.

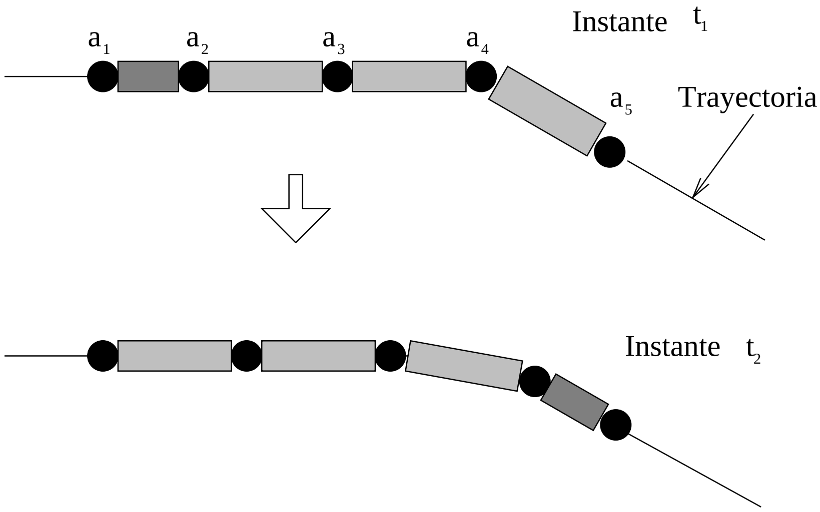

Figura 6.8: Un gusano plano describiendo una función de trayectoria

6.3.4. Avance y coordinación

¿Cómo se mueve un gusano plano? El movimiento se consigue por tener segmentos contráctiles, igual que si fuese un gusano longitudinal. Si el gusano tiene un vector de orientación del tipo $E_o(t) = (\theta_1, 0, 0, ..., 0)$, es decir, que todas sus articulaciones están en línea, el movimiento de avance es el mismo que el de un gusano longitudinal. Para generar los estados internos se utiliza una función de contorno que vaya propagando los estados de contracción desde la cola hasta la cabeza.

Los problemas surgen cuando el gusano está en un estado de orientación diferente, no estando todas las articulaciones alineadas. En este caso no sólo basta con que se propaguen los estados de contracción sino que tienen que propagarse también los estados de orientación de manera que siempre se ajusten a la función de trayectoria. Podemos hacer la siguiente pregunta:

> ***¿Cómo realizar la coordinación entre ambas evoluciones para obtener la secuencia de movimiento correcta que hace que un gusano plano pueda seguir una función de trayectoria?***

En la figura 6.8 aparece un gusano plano en dos intantes de tiempo diferentes t_1 y t_2 en los cuales se está ajustando a la función de trayectoria mientras avanza. En el instante t_1 el vector de contracción es $E_c(t_1) = (A, 0, 0, 0)$ y en el t_2 es $E(t_2) = (0, 0, 0, A)$. La contracción de la cola se ha propagado a la cabeza y entre medias el estado de orientación ha cambiado.

Los pasos para lograr la coordinación y que el gusano evolucione de un estado $E(t_1)$ a otro $E(t_2)$ son los siguientes:

1. Desplazar la función de contorno para obtener el vector de contracción $E_c(t_2)$.
2. Calcular las nuevas coordenadas de las articulaciones, respecto a un eje paralelo al y

3. Aplicar el algoritmo de ajuste respecto de la función de trayectoria para obtener los estados de orientación $E_o(t_2)$

4. Volver al punto 1.

En la figura 6.9 se muestra un ejemplo aplicado para un gusano de cinco articulaciones y cuatro segmentos.

6.4. Gusano tridimensional

6.4.1. Introducción

Entenderemos por **gusano tridimensional** un gusano constituido por N articulaciones de doble estado y $N-1$ segmentos rígidos. Estas articulaciones permiten orientar un segmento en cualquier dirección del espacio. De esta forma, el gusano tridimensional puede tener partes que estén fuera del plano xy, a diferencia de los gusanos planos. La proyección de estos gusano sobre el plano xy es un gusano plano.

6.4.2. Articulaciones de doble estado

Son articulaciones que tienen dos grados de libertad, todo ello en un único "encapsulado". Obviamente son articulaciones ficticias, no existen en la realidad, pero son muy útiles para modelar. Supondremos que son "puntos gordos" con dos segmentos conectados. Los segmentos se pueden orientar en cualquier dirección del espacio. En la figura 6.10 se ha dibujado una de estas articulaciones con un segmento. Los ángulos que definen su estado son φ, *ángulo de elevación* y θ, *ángulo de orientación*.

6.4.3. Parámetros

- **N**: Número de articulaciones de doble estado
- φ_i: Ángulo de elevación de la articulación i
- θ_i: Ángulo de orientación de la articulación i
- **L**: Longitud de los segmentos
- L_T: Longitud total del gusano
- $L_P(t)$: Longitud proyección. Es la longitud del gusano plano proyección del gusano tridimensional.

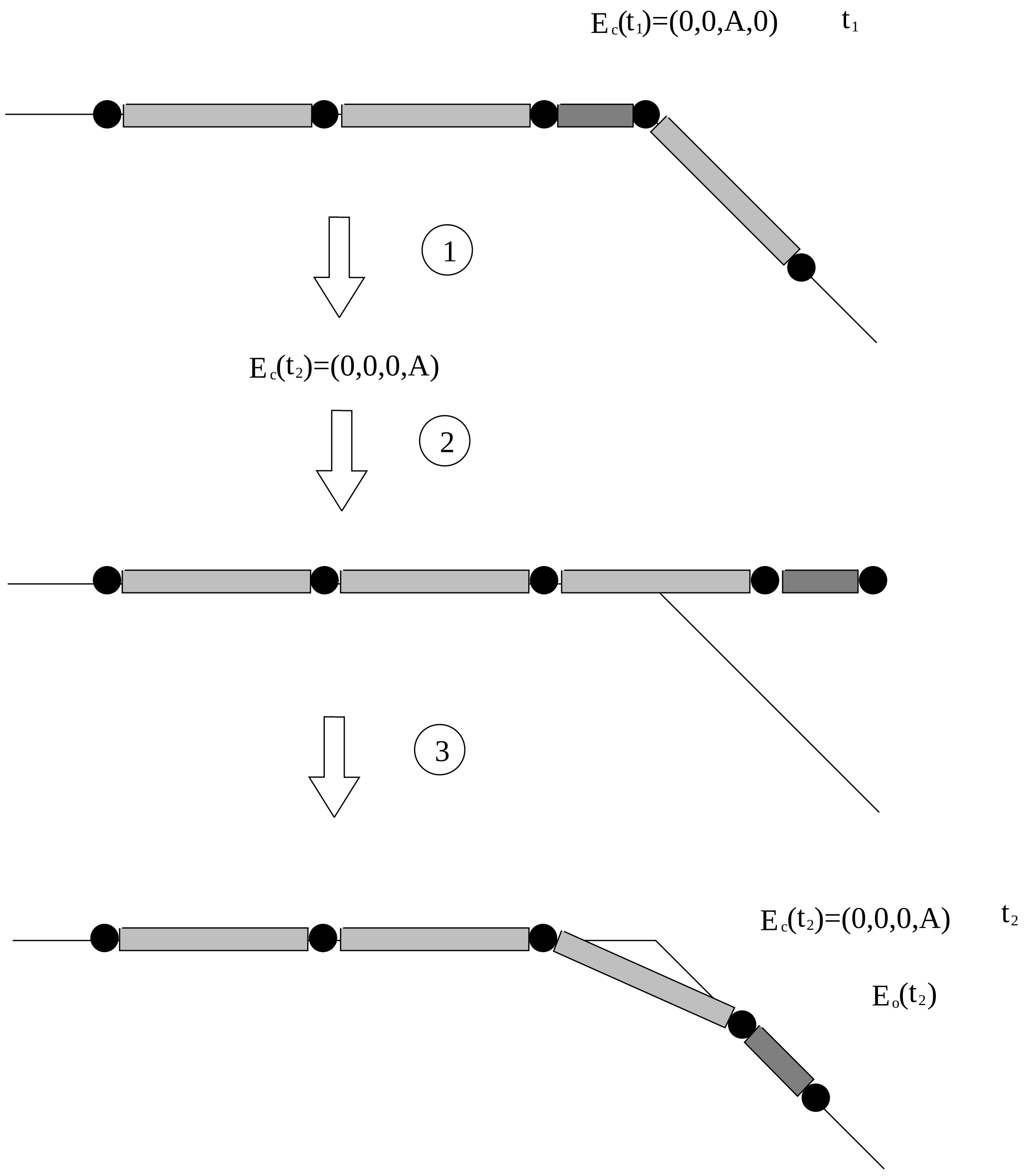

Figura 6.9: Ejemplo de generación de los vectores de estado $E_c(t)$ y $E_o(t)$

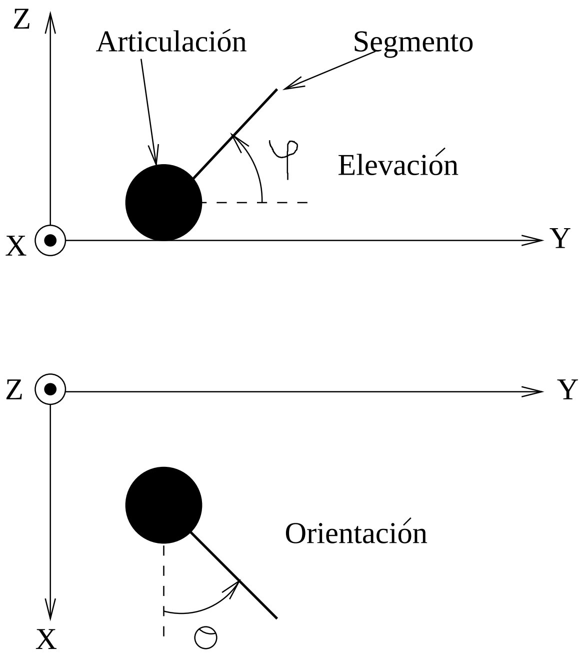

Figura 6.10: Articulacion de doble estado

6.4.4. Caracterización

Las articulaciones se caracterizan por el ángulo de orientación $\theta_i(t)$ y el de elevación $\varphi_i(t)$. Necesitamos dos vectores de N componentes para caracterizar el gusano tridimensional:

- **Vector de orientación**: $E_o(t) = (\theta_1(t), ..., \theta_N(t))$
- **Vector de elevación**: $E_e(t) = (\varphi_1(t), ..., \varphi_{N-1}(t))$

Estos dos vectores forman el **vector de estado del gusano tridimensional**: $E(t) = [E_e(t), E_o(t)]$.

6.4.5. Relación con el gusano plano

Si nos fijamos en la proyección del gusano sobre el plano xy, se trata de un gusano plano. La longitud de los segmentos del gusano plano depende de los estados de elevación. El estado de orientación del gusano tridimensional y del gusano plano es el mismo en todo momento. Por ello es más sencillo trabajar con la proyección para determinar estos estados. En la figura 6.11 aparece un gusano tridimensional, en un cierto estado de elevación y un estado de orientación.

6.5. Algoritmo de giro

6.5.1. Planteamiento del problema

La pregunta que nos hacemos es:

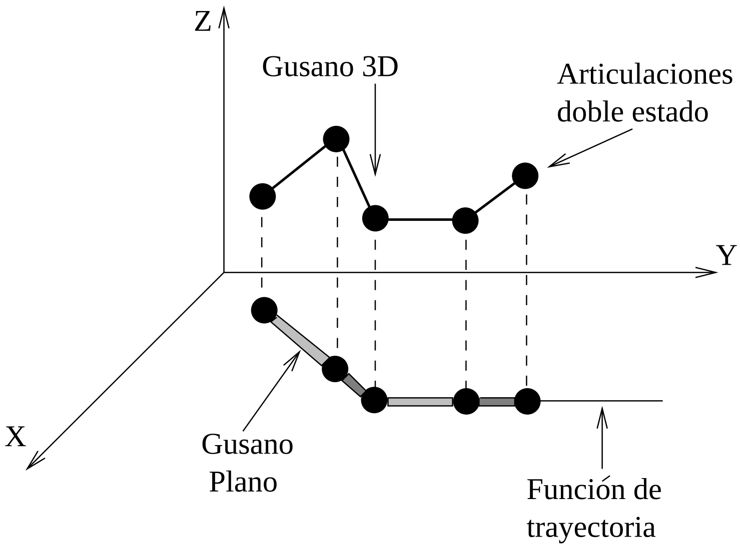

Figura 6.11: Gusano tridimensional y su proyección

¿Cómo conseguir que un gusano tridimensional gire mientras se desplaza según una función de contorno y una función de trayectoria?

El gusano tridimensional está caracterizado por su estado interno, constituido por los vectores de elevación y por los vectores de orientación. Para conseguir movimiento es necesario coordinar estos estados. En la figura 6.12 se resume el proceso. Existen dos entradas muy importantes: la **función de contorno** que determina la evolución de los estados de elevación y la **función de trayectoria** que determina la de los estados de orientación. Para obtener el estado final hay que coordinar estas dos evoluciones.

6.5.2. Pasos del algoritmo

Supondremos que la función de contorno no varía sus parámetros durante el avance del gusano (no cambia ni la amplitud, ni la longitud de onda, ni la velocidad de propagación). Esta suposición permite que el algoritmo de avance sea más sencillo pero no implica ninguna limitación.

El estado interno del gusano tridimensional está determinado por el vector de estado, constituido por los vectores de elevación y de orientación. Para que avance tendremos que determinar una secuencia constituida por S vectores de estado.

Haremos las siguientes suposiciones:

1. La secuencia de elevación está constituida por M vectores: $\{E_{e_1},...,E_{e_M}\}$
2. Esta secuencia se calcula a partir del gusano tridimensional cuando está en reposo y es recorrido por la función de contorno. En este estado el gusano tridimensional es similar a uno transversal.

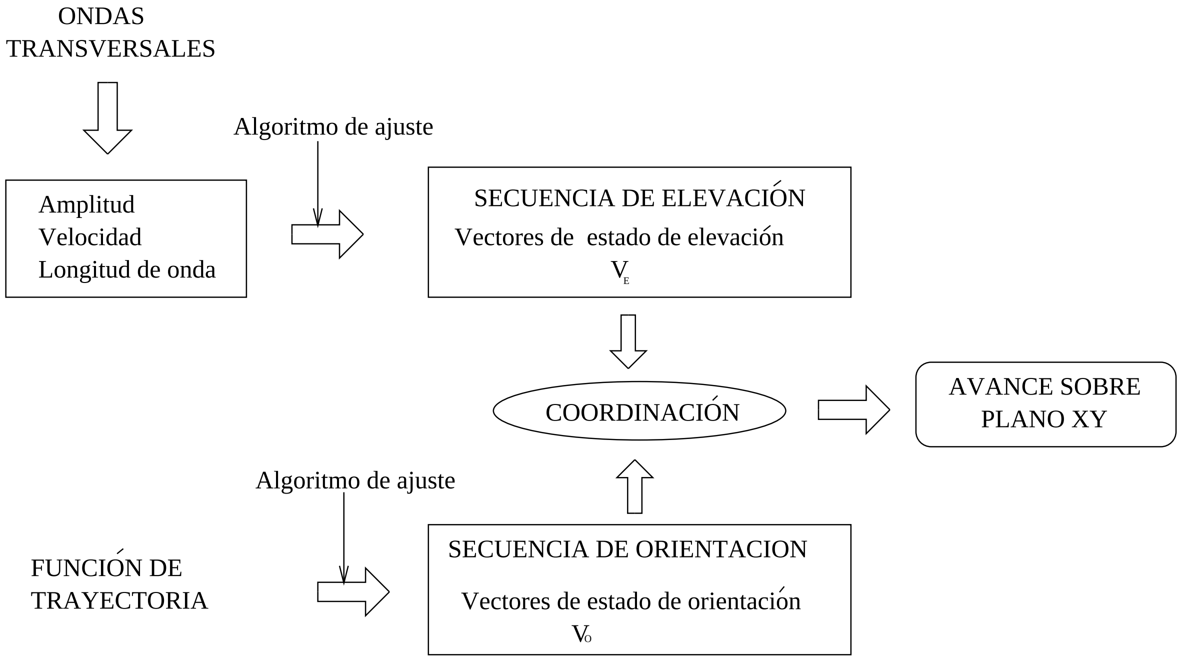

Figura 6.12: Etapas para la generación de secuencias de movimiento de un gusano tridimensionalo sobre plano xy

3. Supondremos que la trayectoria es simple, constituida por dos segmentos que forman un ángulo α. Lo que se quiere es que el gusano gire un ángulo α.

4. El estado de orientación inicial es $E_{o_1} = (0, ..., 0)$ y el final $E_{o_S} = (\alpha, 0, ..., 0)$. En la figura 6.13 se muestra la función de trayectoria empleada y el gusano plano, proyección del tridimensional en los estados inicial y final.

El **algoritmo de giro** es el siguiente:

1. Dado el gusano tridimensional en reposo, y dada la función de contorno, obtener la secuencia de estados para que éste avance como si fuese un gusano transversal. Obtenemos una secuencia de M vectores de estado de elevación $\{E_{e_i}\}$.

2. Inicializar $j = 1$, que indica el vector de orientación

3. Repetir cíclicamente desde $i = 1$ hasta $i = M$

   a) Situar el gusano en estado de elevación E_{e_i} con un estado de orientación de reposo, respetando el valor de orientación θ_1 de la articulación 1 que determina hacia dónde está orientado. Inicialmente $\theta_1 = 0$.

   b) Obtener las coordenadas (x, y) de las articulaciones del gusano plano resultante.

   c) Aplicar el algoritmo de ajuste con respecto a la función de trayectoria. Con ello se obtiene el vector de orientación E_{o_j}.

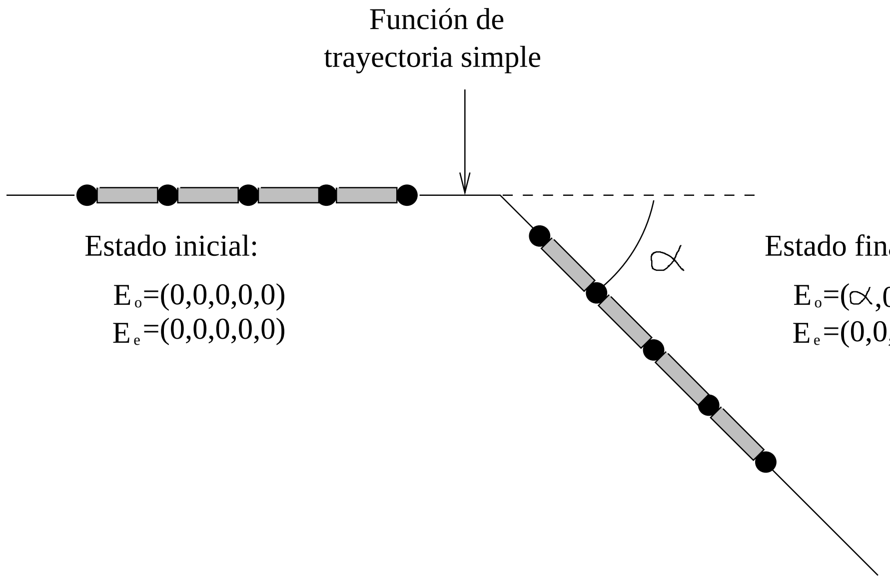

Figura 6.13: Función de trayectoria simple y gusano en estado inicial y final

d) Si $E_{o_j} = (\alpha, 0, 0, ..., 0)$ ya se ha completado el giro. Longitud de la secuencia: $S = j$.FIN

e) El vector de estado es $E = [E_{e_i}, E_{o_j}]$, que se añade a la secuencia.

f) $j = j + 1$. Volver al punto 3.

En la figura 6.14 se ha representado gráficamente el algoritmo de giro.

6.6. Implementación de gusanos tridimensionales

El problema que presentan estos gusanos es el de **la articulación de doble estado**. Este tipo de articulaciones no se encuentran en el mercado y se han de implementar a partir de dos servos, uno para la orientación y otro para la elevación. La mecánica se complica, dejando de tenerse un gusano simple, alejándose de los objetivos del proyecto. No obstante, como se ha demostrado en este capítulo, el control mediante propagación de ondas es viable pudiéndose conseguir que además de avanzar, el gusano realice giros.

6.7. Resumen

Para abordar el problema del giro se utiliza un modelo de gusano tridimensional. Para comprender bien este modelo primero se han presentado otros gusanos que están relacionados. En primer lugar se ha estudiado un **gusano plano rígido**, constituido por N articulaciones y por $N - 1$ segmentos rígidos, que se puede ajustar a una función de trayectoria obteniéndose unos

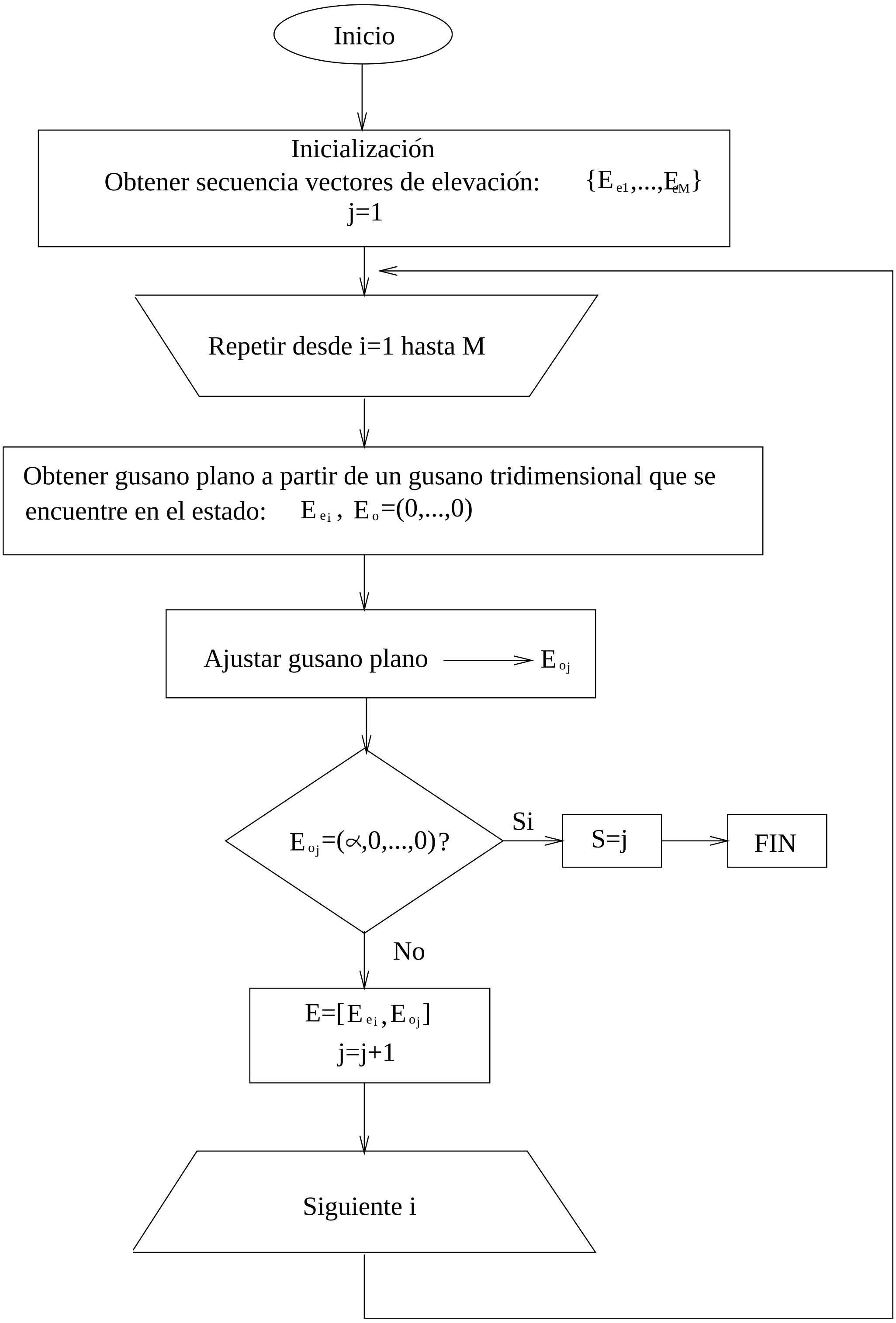

Figura 6.14: Algoritmo de avance para una trayectoria simple

estados de orientación. Este modelo se ha complicado un poco haciendo que los segmentos además sean contráctiles. Es el **gusano plano contráctil**. Con este gusano se ha estudiado cómo conseguir que se ajuste a una función de trayectoria mientras avanza como si fuese un gusano longitudinal normal.

Finalmente se ha presentado el modelo de **gusano tridimensional**, cuya proyección en el plano xy es un gusano plano contráctil. Se ha presentado un algoritmo de giro para este gusano, basado en la función de contorno de un gusano transversal y en la función de trayectoria a la que se ajusta el gusano plano.